

Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

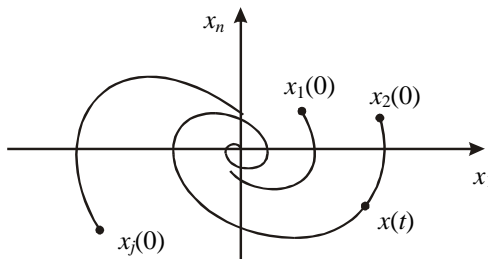
А. С. ВОСТРИКОВ, Г. А. ФРАНЦУЗОВА,  
Е. Б. ГАВРИЛОВ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

5-е издание, переработанное и дополненное

Утверждено

Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия



НОВОСИБИРСК  
2008

УДК 681.511.2(075.8)  
В 785

**Инновационная образовательная программа НГТУ  
«Высокие технологии»**

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент *В.Н. Аносов*;  
д-р техн. наук, зав. лаб. Института автоматике и электротметрии  
СО РАН *Ю.Н. Золотухин*

Работа подготовлена на кафедре автоматике  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по направлениям 550200, 651900 – «Автоматизация и управление»

**Востриков А.С.**

В 785 Основы теории непрерывных и дискретных систем регулирования. –  
5-е изд., перераб. и доп.: учеб. пособие / А.С. Востриков, Г.А. Фран-  
цузова, Е.Б. Гаврилов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – 476 с.

ISBN 978-5-7782-1129-9

**Востриков Анатолий Сергеевич  
Французова Галина Александровна  
Гаврилов Евгений Борисович**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ  
И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ**

**Учебное пособие**

Редактор *И.Л. Кескевич*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *И.Е. Семенова*  
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
Компьютерная верстка *Н.М. Шувалева*

---

Подписано в печать 25.11.2008. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная  
Тираж 250 экз. Уч.-изд. л. 24,18. Печ. л. 26,0. Изд. № 219. Заказ № 1534

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

**УДК 681.511.2(075.8)**

**ISBN 978-5-7782-1129-9**

- © Востриков А.С., Французова Г.А.,  
Гаврилов Е.Б., 2008
- © Новосибирский государственный  
технический университет, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	10
<b>Г л а в а 1. ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>13</b>
1.1. Предмет теории автоматического управления.....	13
1.2. Основные понятия и определения.....	15
1.3. Примеры систем управления.....	17
<b>Г л а в а 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b> .....	<b>21</b>
2.1. Дифференциальные уравнения.....	21
2.2. Составление математической модели.....	24
2.3. Переходная характеристика.....	29
2.4. Импульсная переходная функция.....	31
2.5. Переходная матрица.....	32
2.6. Передаточная функция.....	34
2.7. Модальные характеристики.....	40
2.8. Частотные характеристики .....	42
Заключение .....	46
Задачи .....	46
<b>Г л а в а 3. СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД</b> .....	<b>51</b>
3.1. Типовые динамические звенья.....	52
3.1.1. Пропорциональное (усилительное) звено.....	52
3.1.2. Дифференцирующее звено.....	53
3.1.3. Интегрирующее звено .....	56
3.1.4. Апериодическое звено.....	58
3.1.5. Форсирующее звено.....	62
3.1.6. Звено второго порядка.....	65
3.2. Структурные схемы.....	69
3.3. Структурные преобразования.....	70
3.3.1. Последовательное соединение звеньев .....	70
3.3.2. Параллельное соединение звеньев.....	71
3.3.3. Обратная связь.....	72
3.3.4. Правило переноса.....	72
3.4. Структурные схемы, соответствующие дифференциальным уравнениям .....	76
3.5. Переход от передаточной функции к каноническому описанию .....	78
3.5.1. Первая каноническая форма .....	79
3.5.2. Вторая каноническая форма.....	82
3.6. Область применения структурного метода .....	87
Заключение .....	87
Задачи .....	88
<b>Г л а в а 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b> .....	<b>91</b>
4.1. Основные понятия .....	91
4.2. Условия устойчивости линейных систем .....	94

4.2.1. Общее условие устойчивости линейных систем .....	94
4.2.2. Необходимое условие устойчивости .....	96
4.3. Критерии устойчивости .....	98
4.3.1. Критерий устойчивости Гурвица .....	98
4.3.2. Критерий устойчивости Михайлова .....	102
4.3.3. Критерий устойчивости Найквиста .....	108
4.3.4. Логарифмическая форма критерия Найквиста .....	113
4.4. Области и запасы устойчивости .....	116
4.4.1. Основные понятия и определения .....	116
4.4.2. Частотные оценки запаса устойчивости .....	118
4.4.3. Корневые оценки запаса устойчивости .....	119
Заключение .....	121
Задачи .....	121
<b>Глава 5. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>127</b>
5.1. Показатели качества переходных процессов .....	128
5.1.1. Ошибка регулирования .....	128
5.1.2. Быстродействие .....	129
5.1.3. Перерегулирование .....	130
5.1.4. Интегральные оценки .....	131
5.2. Анализ статических режимов .....	132
5.2.1. Статические системы .....	133
5.2.2. Астатические системы .....	135
5.2.3. Следящие системы (системы позиционирования) .....	137
5.2.4. Неединичная обратная связь .....	139
5.3. Частотный метод анализа .....	142
5.3.1. Общие соотношения .....	142
5.3.2. Оценка переходных процессов по вещественной частотной характеристике .....	143
5.3.3. О начальном участке переходной характеристики .....	146
5.4. Корневой метод анализа .....	147
5.4.1. Корневые оценки переходного процесса .....	147
5.5. Анализ процессов в системах низкого порядка .....	149
5.5.1. Система первого порядка .....	149
5.5.2. Система второго порядка .....	150
5.5.3. Система третьего порядка .....	151
Заключение .....	154
Задачи .....	154
<b>Глава 6. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>161</b>
6.1. Основные понятия .....	161
6.2. Постановка задачи синтеза одноканальных систем .....	163
6.3. Условия разрешимости задачи синтеза .....	165
6.3.1. Ресурсное ограничение .....	165
6.3.2. Устойчивость «обратного» объекта .....	166
6.3.3. Управляемость .....	168

6.3.4. Наблюдаемость .....	170
6.3.5. О вырождении передаточной функции .....	173
6.4. Частотный метод синтеза.....	175
6.4.1. Постановка задачи.....	175
6.4.2. Влияние частотной характеристики разомкнутой системы на свойства замкнутой .....	176
6.4.3. Основные соотношения частотного метода синтеза.....	178
6.4.4. Построение асимптотической ЛАЧХ объекта .....	179
6.4.5. Построение желаемой ЛАЧХ .....	181
6.4.6. Определение передаточной функции регулятора .....	184
6.4.7. Влияние возмущения и помехи измерения на свойства замкнутой системы .....	185
6.4.8. Процедура синтеза регулятора частотным методом .....	188
6.4.9. О влиянии сокращаемых множителей.....	189
6.5. Модальный метод синтеза .....	193
6.5.1. Основные понятия.....	193
6.5.2. Постановка задачи синтеза для одноканального объекта.....	194
6.5.3. Выбор корректора статики.....	195
6.5.4. Расчет корректора динамики .....	196
6.5.5. Реализация регулятора.....	199
6.5.6. Процедура синтеза регулятора модальным методом .....	202
Заключение .....	206
Задачи .....	207
<b>Г л а в а 7. ЛИНЕЙНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ.....</b>	<b>211</b>
7.1. Введение.....	211
7.2. Динамические характеристики линейных импульсных систем .....	213
7.2.1. Разностные уравнения .....	213
7.2.2. Решетчатые функции .....	217
7.2.3. Экстраполятор нулевого порядка .....	218
7.2.4. Z-преобразование .....	221
7.2.5. Дискретные передаточные функции.....	224
7.2.6. Обратное Z-преобразование .....	228
7.2.7. Структурные представления дискретных систем .....	229
7.2.8. Структурные представления разностных уравнений .....	230
7.2.9. Переход от передаточных функций к структурным схемам .....	232
7.3. Устойчивость линейных импульсных систем.....	236
7.3.1. Общее условие устойчивости .....	238
7.3.2. Геометрическая интерпретация общего условия устойчивости .....	240
7.3.3. Билинейное преобразование .....	240
7.3.4. Утверждение Котельникова–Шеннона .....	242
7.3.5. Преобразование Тастина .....	245
7.4. Анализ процессов в линейных импульсных системах .....	248
7.4.1. Задачи анализа .....	248
7.4.2. Процессы минимальной длительности.....	250

7.5. Синтез линейных импульсных систем.....	251
7.5.1. Задача синтеза .....	251
7.5.2. Управляемость линейных импульсных объектов .....	253
7.5.3. Наблюдаемость линейных импульсных систем .....	256
7.5.4. Модальный метод синтеза. Процедура синтеза по выходу .....	259
7.5.5. Процедура модального метода синтеза по состоянию .....	267
7.5.6. Процедура модального метода синтеза по состоянию для одноканального объекта .....	270
7.5.7. Построение одноканальных астатических систем .....	271
7.6. Наблюдатели состояния .....	274
7.6.1. Операторная процедура синтеза наблюдателей .....	274
7.6.2. Матричная процедура синтеза наблюдателей .....	279
7.6.3. Матричная процедура синтеза наблюдателей для одно- канальных объектов .....	281
7.6.4. Наблюдатели пониженного порядка .....	283
7.6.5. Особенности уравнений динамики систем с наблюдателями .....	289
7.7. Реализация типовых ПИД-регуляторов.....	290
7.7.1. Непрерывный аналог .....	290
7.7.2. Цифровая реализация ПИД-регулятора .....	291
7.7.3. Модификации цифрового ПИД-регулятора.....	292
7.7.4. О настройке ПИД-регулятора .....	294
Заключение .....	295
Задачи .....	295

## Г л а в а 8. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....

8.1. Нелинейные дифференциальные уравнения .....	301
8.2. Пространство состояний .....	303
8.3. Комбинированное описание нелинейных систем .....	304
8.4. Особенности процессов в нелинейных системах.....	305
Заключение .....	306

## Г л а в а 9. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....

9.1. Основные понятия и определения.....	308
9.2. Исследование устойчивости по линейному приближению .....	310
9.3. Второй метод Ляпунова .....	312
9.3.1. Основные понятия.....	312
9.3.2. Теоремы второго метода Ляпунова .....	315
9.3.3. Применение второго метода Ляпунова для анализа устой- чивости линейных систем .....	317
9.3.4. Проверка устойчивости одного класса нелинейных систем .....	320
9.4. Частотный способ анализа устойчивости.....	323
9.4.1. Теорема Попова об абсолютной устойчивости .....	323
9.4.2. Графическая интерпретация условий теоремы.....	324
9.4.3. Процедура проверки абсолютной устойчивости .....	326
Заключение .....	328
Задачи .....	329

## Г л а в а 10. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

10.1. Метод фазовой плоскости.....	335
10.2. Метод гармонического баланса .....	338
10.2.1. Основные сведения.....	338
10.2.2. Метод гармонической линеаризации .....	339
10.2.3. Основное уравнение метода гармонического баланса .....	343
10.2.4. Аналитический способ определения автоколебаний.....	344
10.2.5. Влияние параметров системы на периодические процессы .....	345
10.2.6. Способ Гольдфарба.....	346
10.2.7. Способ Коченбургера .....	349
10.2.8. Коррекция автоколебаний.....	351
10.2.9. Условия применимости метода гармонического баланса .....	351
10.3. Метод малого параметра.....	352
10.4. Метод разделения движений.....	354
10.4.1. Общие свойства систем .....	354
10.4.2. Выделение отдельных составляющих движения.....	356
10.4.3. Основные теоремы метода разделения движений.....	359
10.4.4. Условия разделимости движений .....	360
Заключение .....	364
Задачи .....	365

## Г л а в а 11. СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

11.1. Постановка задачи синтеза нелинейных одноканальных систем.....	372
11.2. Условия разрешимости задачи синтеза .....	374
11.2.1. Реализуемое состояние равновесия .....	374
11.2.2. Реализуемые желаемые уравнения .....	376
11.3. Метод локализации .....	379
11.3.1. Основные свойства систем первого порядка .....	380
11.3.2. Оценка влияния помех измерения .....	382
11.3.3. Дифференцирующий фильтр .....	383
11.3.4. Анализ влияния малых инерционностей.....	385
11.3.5. Выбор параметров дифференцирующего фильтра .....	387
11.3.6. Системы произвольного порядка.....	389
11.3.7. Процедура синтеза системы методом локализации .....	391
Заключение .....	393
Задачи .....	394

## Г л а в а 12. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА

12.1. Основные понятия и определения.....	397
12.2. Описание объекта управления .....	399
12.3. Типовые модели экстремальной характеристики объекта.....	400
12.4. Условие экстремума .....	402
12.5. Постановка задачи синтеза экстремальных систем .....	403
12.6. Способы оценки градиента.....	404

---

12.6.1. Способ деления производных .....	404
12.6.2. Способ конечных разностей .....	405
12.6.3. Оценка знака градиента .....	406
12.6.4. Способ синхронного детектирования .....	407
12.6.5. Оценка градиента с помощью специального фильтра .....	411
12.7. Организация движения к экстремуму .....	413
12.7.1. Градиентные системы первого порядка .....	413
12.7.2. Метод «тяжелого шарика» .....	415
12.7.3. Одноканальные системы общего вида .....	417
12.7.4. Градиентные системы, основанные на методе локализации .....	418
Заключение .....	422
Задачи .....	423
<b>Глава 13. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>427</b>
13.1. Основные понятия .....	427
13.2. Постановка задачи синтеза оптимальных систем .....	430
13.2.1. Описание объекта управления .....	430
13.2.2. Описание начальных и конечных состояний .....	430
13.2.3. Ограничения на переменные состояния и управление .....	432
13.2.4. Критерий оптимальности .....	433
13.2.5. Форма результата .....	435
13.3. Метод динамического программирования .....	435
13.3.1. Принцип оптимальности .....	435
13.3.2. Основные соотношения метода динамического программирования .....	436
13.3.3. Расчетные соотношения метода динамического программирования .....	439
13.4. Принцип максимума Понтрягина .....	442
13.4.1. Основное соотношение принципа максимума .....	442
13.4.2. Процедура определения оптимального управления .....	444
13.4.3. Задача оптимального быстродействия .....	448
13.5. Метод поверхности переключения .....	452
13.5.1. Основные понятия .....	452
13.5.2. Метод обратного времени .....	454
13.6. Субоптимальные системы .....	458
Заключение .....	460
Задачи .....	461
Послесловие .....	463
Библиографический список .....	469
Приложения .....	472



## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$T$  – постоянная времени, или шаг квантования (для импульсных систем)

$x$  – вектор состояния

$u$  – вектор управления

$y$  – вектор выходных (регулируемых) переменных

$v$  – вектор входных переменных

$t$  – время

$\tau$  – время внутри интервала интегрирования

$I$  – единичная матрица

$R^n$  – линейное пространство размерности  $n$

$\text{Dim}$  – размерность пространства или вектора (dimension)

$\text{Deg}$  – степень полинома (degree)

$r A$  – ранг матрицы  $A$

$p$  – оператор дифференцирования

$W(p)$  – передаточная функция

$\mu$  – малый параметр

$f(\cdot)$  – обозначая таким образом, мы обсуждаем вид функции, а не значение

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемый читатель, вашему вниманию предлагается очередное издание учебного пособия по дисциплине «Теория автоматического управления», которая изучается во всех технических вузах мира. Несмотря на относительно большое число научных публикаций, учебников и учебных пособий, методы расчета регуляторов для современных систем управления представлены, на наш взгляд, недостаточно полно. Именно это обстоятельство и послужило причиной написания данной книги, которая к настоящему времени выдержала уже четыре издания.

В пятом издании книги сохранены структура и подход к изложению материала предыдущих изданий, при этом учтены отзывы и пожелания коллег, использовавших ее в учебном процессе. В частности, уточнены некоторые определения, заменены отдельные задачи и примеры, исправлены замеченные опечатки, исключены некоторые разделы, которые сейчас, как нам кажется, не очень часто применяются на практике. В настоящее издание включены также разделы, посвященные анализу и синтезу линейных импульсных систем регулирования, написанные нашим коллегой – Е.Б. Гавриловым.

Книга подготовлена на основе лекций по соответствующему учебному курсу, который на протяжении многих лет вели авторы на кафедре автоматики Новосибирского государственного технического университета (НГТУ). В оригинальном курсе лекций центральным разделом, который определяет логику изложения остальных, является синтез систем управления. Этот подход сохранен и в предлагаемой книге, где соблюдался логический переход от простых вопросов к более сложным.

Процедуру расчета регуляторов для соответствующего класса систем иллюстрируют примеры, помещенные в конце каждой главы. Материал пособия представлен в удобной для учебного процесса форме, добавлены задачи для самостоятельного решения, что позволяет

использовать его не только на практических занятиях, но и при самостоятельном изучении дисциплины.

Поскольку изложение базируется главным образом на описании динамических систем в пространстве состояний, предполагается, что читатели знакомы с основами линейной алгебры. При исследовании свойств линейных систем управления используется также аппарат передаточных функций и частотных характеристик.

В книге приведены оригинальные научные результаты авторов, такие как: условия разрешимости задач синтеза, операторная процедура модального метода расчета линейных систем, синтез нелинейных систем, применение метода разделения движений для расчета регуляторов нелинейных систем, устройство оценки частной производной, способ организации автоматического движения к экстремуму и некоторые другие.

Структура книги такова: в первой главе приведены основные понятия и определения дисциплины. Вторая глава содержит способы описания элементов систем управления, а также процедуру получения математической модели объекта. В третьей главе представлены простейшие звенья автоматических систем и правила составления из них сложных структур. Четвертая глава посвящена исследованию основного качественного свойства систем автоматического управления – устойчивости. В пятой главе приведены оценки качества переходных процессов и способы их получения на базе различных динамических характеристик. В шестой главе исследованы условия разрешимости задачи синтеза и подробно описаны две основные процедуры расчета линейных систем управления, даны рекомендации по реализации регулятора. Седьмая глава посвящена вопросам анализа и синтеза линейных импульсных систем регулирования. Восьмая глава содержит динамические характеристики нелинейных систем. В девятой главе представлены основные понятия и определения устойчивости нелинейных систем, а также способы анализа их устойчивости. В десятой главе проведен анализ процессов в нелинейных системах. Здесь кроме метода фазовой плоскости и метода гармонического баланса представлены метод малого параметра и метод разделения движений. Одиннадцатая глава содержит материал по синтезу регулятора для нелинейных систем, отражающий авторский взгляд на данную проблему. Двенадцатая глава знакомит читателя с основными подходами к анализу и синтезу автоматических систем поиска экстремума и содержит научные результаты авторов в этой области. Следует отметить, что

здесь рассматриваются системы, в которых объект управления наряду с динамической частью содержит статическую экстремальную характеристику. В тринадцатой главе представлены методы синтеза оптимальных систем.

Основные теоретические положения и процедуры синтеза для каждого из рассмотренных типов систем управления иллюстрируют примеры расчета. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения. Обращаем внимание на то, что во всех примерах и задачах параметры математических моделей указаны в относительных единицах.

Отдельные вопросы, вошедшие в учебное пособие, обсуждались на научном семинаре «Синтез систем управления» при кафедре автоматики НГТУ, всем участникам которого авторы выражают свою глубокую признательность.

Все замечания и пожелания читателей по содержанию книги авторы примут с благодарностью и просят направлять по адресу e-mail: [vostrikov@nstu.ru](mailto:vostrikov@nstu.ru), [frants@ac.cs.nstu.ru](mailto:frants@ac.cs.nstu.ru), [gavrilov@nstu.ru](mailto:gavrilov@nstu.ru)

*А.С. Востриков,  
Г.А. Французова*

---

---

# Г л а в а 1

## ВВЕДЕНИЕ

---

---

### 1.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Т**еория автоматического управления – это научная дисциплина, которая возникла сравнительно недавно, хотя отдельные устройства, работавшие без участия человека, известны с глубокой древности.

Появившиеся в результате первой промышленной революции в Европе в конце XVIII века регуляторы (1765 г. – регулятор уровня И.И. Ползунова, а в 1784 г. – регулятор скорости паровой машины Д. Уатта) были предназначены для стабилизации работы технических устройств, на которые действуют внешние факторы из окружающей среды. Очень полезным способом оказалось использование отрицательной обратной связи, которую в XIX веке вводили еще интуитивно, но без соответствующих расчетов это не всегда давало нужный эффект. Часто вместо предполагаемого улучшения работы применение регуляторов с отрицательной обратной связью приводило к неожиданным техническим явлениям: неустойчивости, генерации новых движений.

Для изучения этих явлений потребовались соответствующие методы, которые могли бы объяснить необычные свойства и позволили установить общие закономерности работы регуляторов. Их основы были изложены в появившихся в конце XIX века первых работах «о регуляторах» английского физика Д. Максвелла (1866 г.) и русского механика И.А. Вышнеградского (1876, 1877 гг.).

Активное развитие новой теории началось с появлением электротехнических систем, в частности электромашинных, и систем радиоавтоматики. До сих пор классическим примером систем автоматического управления является система регулирования скорости электрической машины. Впоследствии оказалось, что методы теории автоматического управления позволяют объяснить работу объектов различной физической природы: в механике, энергетике, радио- и электротехнике, т. е. везде, где можно усмотреть обратную связь. Все методы объединяет одна общая задача: обеспечить необходимую точность и удовлетворительное качество переходных процессов. Таким образом, теория автоматического управления является по существу теорией процессов в системах с отрицательной обратной связью.

К настоящему времени теория автоматического управления – это сложившаяся научная дисциплина со своим аналитическим аппаратом, в развитие которого большой вклад внесли известные русские ученые-математики А.М. Ляпунов, Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский и др.

Как и любая теория, она имеет дело не с реальными инженерными конструкциями, а с их моделями. Они выражаются, как правило, математическим языком, т.е. имеют вид определенных уравнений. Понятно после этого, что все выводы и рекомендации теории автоматического управления справедливы только при полном соответствии моделей и реальных устройств, но этого никогда не бывает на практике.

Результатом неполноты модели является различие в поведении теоретической и реальной систем, что обычно обнаруживается при наладке последней. Таким образом, этап настройки есть неизбежный шаг к получению работоспособной системы автоматического управления. Иногда при большом несоответствии математической модели свойствам реального технического устройства инженеру-проектировщику приходится ее снова уточнять и пересчитывать результат конструирования.

При современном уровне развития науки и техники для составления моделей обычно используется аппарат дифференциальных уравнений, на языке которых сформулированы основные законы механики и физики макромира.

Таким образом, предметом теории автоматического управления являются свойства моделей систем автоматики, которые представлены дифференциальными уравнениями, а также их различными преобразованиями и интерпретациями.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Объект управления** – техническое устройство (часть окружающего мира) или процесс, поведение которого нас не устраивает по каким-либо причинам.

**Управление** – процесс воздействия на объект управления с целью изменения его поведения нужным образом.

**Регулирование** – частный случай управления, целью которого является приведение объекта к заданному состоянию.

**Автоматический процесс** – процесс, который совершается без участия человека.

**Система** – совокупность элементов, объединенных общим режимом функционирования. При этом элементом можно называть любое техническое устройство.

**Динамическая система** – система, процессы в которой изменяются с течением времени в силу собственных свойств.

**Система автоматического управления (САУ)** – динамическая система, которая работает без участия человека.

**Теория автоматического управления (ТАУ)** – научно-техническая дисциплина, в рамках которой изучаются свойства систем автоматического управления, разрабатываются принципы расчета и построения таких систем.

Основными элементами САУ (рис. 1.1) являются:

- **объект управления (ОУ)**;
- **управляющее устройство или регулятор (Р)**, который сравнивает выход управляемого объекта с желаемым и в зависимости от результата вырабатывает управляющий сигнал на объект.

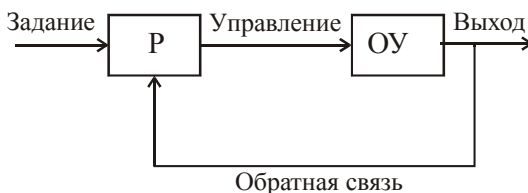


Рис. 1.1. Функциональная схема замкнутой системы

Для того чтобы управлять реальной физической переменной (выходом объекта управления), ее необходимо измерять с помощью специального устройства, которое называется **датчиком** (Д). Измеренное значение выхода сравнивается с заданием и поступает на регулятор, вырабатывающий сигнал управления на объект. Соответствующий вид замкнутой системы управления показан на рис. 1.2.

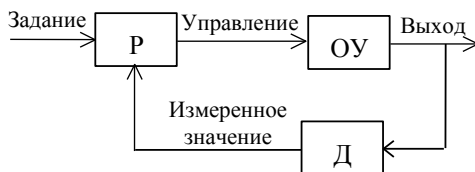


Рис. 1.2. Функциональная схема системы с датчиком

Рассмотрим подробнее объект управления (рис. 1.3) и выделим характеризующие его переменные. К таким переменным относятся:

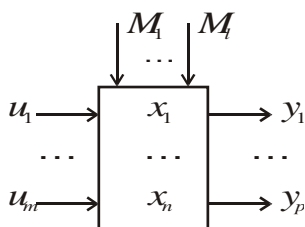


Рис. 1.3. Схема объекта управления

- **управляющие воздействия**  $u_1, \dots, u_m$  — это такие переменные, с помощью которых можно влиять на поведение объекта;

- **выходные переменные**  $y_1, \dots, y_p$  — доступные измерению величины, которые отражают реакцию объекта на управляющие воздействия; чаще всего  $p = m$ ;

- **переменные состояния**  $x_1, \dots, x_n$  — внутренние и часто недоступные измерению переменные, которые определяют состояние объекта в каждый момент времени, причем  $n \geq m$ ;

- **возмущающие воздействия**  $M_1, \dots, M_l$  — отражают случайные воздействия окружающей среды на объект управления и обычно недоступны измерению. Требование подавления их влияния приводит к необходимости создавать системы автоматического управления.

Все переменные, которые характеризуют объект, удобно представить в векторной форме:



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_l \end{bmatrix}.$$

Входные воздействия на систему (или задание на регулятор) будем обозначать буквой  $v$ . Их число обычно совпадает с числом выходных переменных и изображается следующим вектором:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_p \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем для указания соответствующих векторных величин будем использовать обозначения:  $u \in R^m$ ,  $y \in R^p$ ,  $x \in R^n$ ,  $M \in R^l$ ,  $v \in R^p$ ;  $R^m$  –  $m$ -мерное вещественное линейное пространство.

В зависимости от числа входных и выходных переменных выделяют:

- **одноканальные** объекты (или системы) – объекты, в которых есть только одна выходная переменная ( $p = 1$ );
- **многоканальные** (многосвязные, многомерные, взаимосвязанные) объекты (или системы) – объекты, в которых число выходных переменных больше единицы ( $p > 1$ ).

### 1.3. ПРИМЕРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При обсуждении свойств автоматических устройств очень полезно обращаться к реальным примерам, которые достаточно распространены, и по ним можно представить себе поведение технической системы.

Рассмотрим несколько характерных примеров систем автоматического управления.

#### ПРИМЕР 1.1

Одна из самых распространенных систем автоматики – *система стабилизации скорости вращения двигателя постоянного тока с независи-*

мым возбуждением. Цель ее работы заключается в поддержании заданной скорости вращения двигателя при действии «нагрузки» на валу. Системы подобного типа используют, например, в металлорежущих станках, где независимо от глубины резания металла нужно выдерживать заданную скорость вращения. На рис. 1.4 показана упрощенная схема реализации такой системы. Здесь введены следующие обозначения:

$U_{\text{зад}}$  – задающее воздействие на систему (напряжение задания);

ОУ – операционные усилители для согласования электрических цепей на входе и выходе;

$\Delta$  – разница между напряжением задания и напряжением тахогенератора (сигнал рассогласования);

УМ – усилитель мощности для преобразования маломощного сигнала  $\Delta$  в силовое напряжение (напряжение на якоре двигателя);

Д – электродвигатель;

$I$  – ток в цепи электродвигателя;

$R, L$  – сопротивление и индуктивность в якорной цепи;

$U_{\text{я}}$  – напряжение на обмотке якоря электродвигателя;

$U_{\text{возб}}$  – напряжение возбуждения;

ТГ – тахогенератор (маломощный генератор электрического напряжения), используется в качестве датчика скорости вращения двигателя;

$U_{\text{ТГ}}$  – напряжение тахогенератора;

$M_{\text{н}}$  – момент нагрузки.

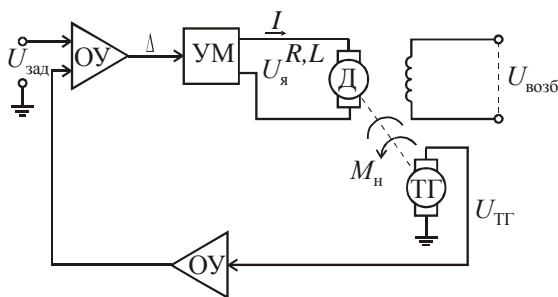


Рис. 1.4. Функциональная схема системы стабилизации скорости вращения двигателя постоянного тока

В этой системе организована отрицательная обратная связь, при которой

$$\Delta = U_{\text{зад}} - U_{\text{ТГ}}.$$

Если нагрузка  $M_H$  повышается, то падает  $U_{ТГ}$  и, как следствие, возрастает  $U_y$ , что позволяет «удержать» обороты двигателя при увеличенной нагрузке на двигатель. Если  $M_H$  уменьшается, происходит обратный процесс, который не дает возможности двигателю слишком увеличить скорость вращения.

При описании этого классического примера введены переменные, которые используются для описания динамических систем: вход –  $U_{зад}$ , выход –  $U_{ТГ}$ , возмущение –  $M_H$ , состояние –  $I, U_y$ , параметры –  $L, R$ .

### ПРИМЕР 1.2

Рассмотрим теперь общеизвестный пример из области бытовой техники – *систему стабилизации температуры в холодильнике*. В каждом холодильнике применяется достаточно простая система автоматического регулирования, цель функционирования которой состоит в стабилизации температуры в камере при изменении массы и температуры закладываемых продуктов или при открывании дверей. На рис. 1.5 приведена упрощенная схема системы стабилизации температуры. Здесь  $U_{зад}$  – сигнал, соответствующий заданной температуре;

УМ – усилитель мощности с релейной характеристикой, который используется в качестве управляющего устройства, он включает или отключает холодильный агрегат (ХА), «прокачивающий» хладагент через трубки камеры;

ДТ – датчик температуры, выходной сигнал  $U_k$  которого пропорционален температуре камеры.

Как правило, в холодильнике не применяются операционные усилители; сравнение заданной и действительной температур происходит непосредственно. На схеме это показано соответствующим элементом.

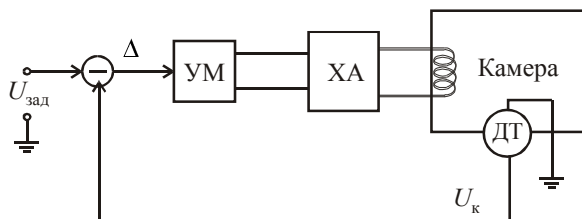


Рис. 1.5. Функциональная схема системы стабилизации

Система работает следующим образом: если камеру открыть и положить некоторую массу теплых продуктов, то в ней сразу повысится температура и возрастет разница  $\Delta$  между заданной (низкой) и повышенной действительной температурой, включится УМ с релейной характеристикой и работает холодильный агрегат. Через некоторое время разница  $\Delta$  станет меньше порогового значения и реле отключится. Такая система работает только в «одну сторону» – на охлаждение. Ее поведение характеризуют величины: вход –  $U_{\text{зад}}$ , выход – напряжение с датчика температуры; состояние – температура внутри камеры, возмущение – количество тепла в закладываемом продукте.

---

---

## Г л а в а 2

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

**П**режде чем изучать поведение реальных систем и их моделей, необходимо определить формальный язык, на котором будут обсуждаться их свойства. Основным элементом такого формального языка является динамическая характеристика, под которой интуитивно понимают какое-либо соотношение, характеризующее свойства систем в статике и динамике (при изменении состояния).

Дадим следующее определение. **Динамической характеристикой** (математической моделью) системы будем называть любое соотношение, заданное аналитически, графически или в виде таблицы, которое позволяет оценить ее поведение во времени.

В этой главе мы будем рассматривать различные способы описания линейных динамических систем, их взаимосвязь и приведение к принятой в теории автоматического управления форме записи математической модели.

Отметим, что динамическая характеристика дает возможность исследовать поведение системы, в частности, рассчитать для нее переходные процессы.

### 2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наиболее часто в качестве математической модели объекта управления используются обыкновенные дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в различной форме.

Линейные многоканальные объекты обычно описывают системой дифференциальных уравнений первого порядка, представленной в векторно-матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (2.1)$$

Здесь  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $n$  – порядок объекта;  $u \in R^m$  – вектор управляющих воздействий,  $m \leq n$ ;  $A$  – квадратная матрица действительных коэффициентов;  $B$  – прямоугольная матрица действительных коэффициентов. Уравнения (2.1) называют **дифференциальными уравнениями состояния**.

Выходные переменные объекта изменяются в соответствии с **уравнением выхода**

$$y = Cx, \quad (2.2)$$

где  $y \in R^m$  – вектор выхода;  $C$  – прямоугольная матрица действительных коэффициентов. Уравнения (2.1) и (2.2) описывают **линейный многоканальный объект**.

Для описания одноканального объекта обычно используется скалярное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 \dot{y} + a_1 y = bu, \quad (2.3)$$

которое также может быть приведено к виду (2.1) и (2.2) после соответствующего выбора линейно-независимых переменных состояния.

Их число всегда равно порядку объекта ( $n$ ), а  $u \in R^1$  и  $y \in R^1$ .

Наиболее простое каноническое описание получается, когда в качестве переменных состояния выбираются выходная переменная  $y$  и ее производные до  $(n-1)$  включительно:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

При этом вместо (2.3) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + bu, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.4)$$

которая соответствует векторно-матричным уравнениям (2.1) и (2.2). Здесь матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix}, \quad C = 1 \ 0 \ \dots \ 0 ,$$

причем их размерности следующие:  $\dim A = n \times n$ ,  $\dim B = n \times 1$ ,  $\dim C = 1 \times n$ .

Следует отметить, что переход к описанию (2.1), (2.2) не является однозначным: для одного объекта можно выбрать бесконечное множество наборов переменных состояния; важно, чтобы они были линейно-независимыми. При этом каждой совокупности переменных состояния будут соответствовать свои матрицы объекта  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

#### ПРИМЕР 2.1

Записать уравнения состояния одноканального объекта, модель которого имеет вид

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u .$$

Рассмотрим два варианта переменных состояния.

1. Если в качестве переменных состояния использовать выходную величину и ее производную  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ , то получим канонические уравнения состояния и матрицы объекта типа (2.4):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = 1 \ 0 .$$

2. Выбирая новые переменные  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y} + 3y$ , получим уравнения состояния и матрицы объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = 1 \ 0 .$$

В общем случае одноканальный объект может описываться дифференциальным уравнением вида

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_1 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u, \quad n \geq m. \quad (2.5)$$

Выбрав соответствующие переменные состояния, от описания (2.5) также можно перейти к векторно-матричным уравнениям типа (2.1), (2.2). Рассмотрим этот переход на примере.

### ПРИМЕР 2.2

Записать уравнения состояния объекта с математической моделью

$$\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 2\dot{u} + u.$$

Перепишем это уравнение:

$$\ddot{y} - 2\dot{u} = -\dot{y} - 3y + u,$$

выберем в качестве переменных состояния  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y} - 2u$  и получим следующие уравнения состояния и матрицы объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в качестве основной динамической характеристики линейных объектов управления используются дифференциальные уравнения, которые могут быть представлены в форме (2.1), (2.2).

## 2.2. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Поскольку в теории автоматического управления рассматриваются не реальные системы управления, а их математические модели, необходимо стремиться к тому, чтобы эти модели достаточно адекватно отражали свойства физических устройств. Процедуру получения математической модели объекта можно разбить на следующие этапы.

- *Составление гносеологической (мысленной) модели объекта.*

Исходя из технического задания и изучения режимов работы объекта инженер представляет себе приближенную модель, которая в дальнейшем уточняется и приобретает вид математической модели.



• *Определение независимых переменных*, которые характеризуют объект, и *уточнение их размерностей*. При этом число управляющих воздействий не может быть меньше числа выходных переменных ( $\dim u \geq \dim y$ ). Размерность вектора переменных состояния не может быть меньше размерности вектора выходных переменных ( $\dim x \geq \dim y$ ). Размерность возмущающих воздействий  $M$  может быть произвольной и никак не связана с размерностью  $u, x, y$ .

• *Запись физических законов*, в силу которых развиваются процессы в объекте.

• *Приведение уравнений объекта к удобному с точки зрения теории автоматического управления виду*.

Математическая модель никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, так как при ее составлении всегда делают какие-либо допущения и упрощения. Поэтому для одной и той же системы в зависимости от целей управления модели могут быть различными.

При составлении математической модели приходится искать компромиссный вариант между двумя противоречивыми требованиями: с одной стороны, модель должна наиболее полно отражать свойства реальной системы, с другой – быть достаточно простой, чтобы не затруднять исследований.

### ПРИМЕР 2.3

Определить математическую модель электрической цепи (рис. 2.1), записать для нее уравнения состояния.

Физическими законами, в соответствии с которыми развиваются процессы в объекте, являются законы Кирхгофа

$$U_1 = L \frac{dI}{dt} + RI, \quad U_2 = RI.$$

$$U_{\text{вых}} = U_2$$

$$R_{\text{н}} = 0$$

$$R_{\text{н}} \rightarrow \infty$$

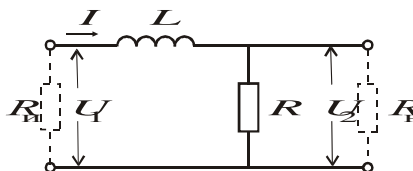


Рис. 2.1. Электрическая схема объекта

Перейдем к удобному с точки зрения теории управления описанию объекта. При этом выходной величиной будем считать напряжение на выходе цепи, т. е.  $y = U_2$ , управляющим воздействием – напряжение на ее входе  $u = U_1$ , а переменной состояния – ток, протекающий по цепи  $x = I$ . С учетом введенных обозначений запишем исходные уравнения объекта в следующем виде:

$$\begin{cases} L\dot{x} + Rx = u, \\ y = Rx, \end{cases}$$

а затем перейдем к принятому описанию в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

где  $A = R/L$ ,  $B = 1/L$ ,  $C = R$ .

#### ПРИМЕР 2.4

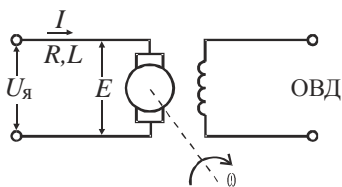


Рис. 2.2. Схема двигателя постоянного тока

Рассмотрим в качестве еще одного примера составление математической модели двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 2.2), который часто используется в системах автоматического управления. Здесь  $U_я$  – напряжение, подаваемое на якорь двигателя, которое будем считать входным воздействием;  $I$  – ток в цепи якоря, представляющий собой внутреннюю переменную объекта;  $R, L$  – сопротивление и индуктивность цепи якоря;  $E$  – противоЭДС, т. е. напряжение, возникающее в обмотке якоря в результате его вращения в магнитном поле;  $\omega$  – скорость вращения двигателя, которую будем считать выходной переменной; ОВД – обмотка возбуждения двигателя.

Запишем основные уравнения, характеризующие процессы в двигателе. Уравнение электрического равновесия якорной цепи имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI + E = U_я.$$

Уравнение равновесия моментов на валу двигателя

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}},$$

где  $J$  – приведенный момент инерции;  $M_{\text{д}}$  – вращающий момент;  $M_{\text{с}}$  – момент сопротивления на валу двигателя, который является возмущающим воздействием.

С достаточной степенью точности во многих случаях можно считать, что  $E = c_1\omega$ ,  $M_{\text{д}} = c_2I$ ,  $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(t)$ , где  $c_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . В результате уравнения двигателя принимают вид

$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} + RI + c_1\omega = U_{\text{я}}, \\ J \frac{d\omega}{dt} = c_2I - M_{\text{с}}. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:  $u = U_{\text{я}}$  – управление;  $x_1 = \omega$  и  $x_2 = I$  – переменные состояния;  $M_{\text{с}}$  – возмущение. Запишем уравнения двигателя в переменных состояниях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2 - hM_{\text{с}}, \\ \dot{x}_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + bu, \\ y = x_1, \end{cases}$$

где  $a_{12} = \frac{c_2}{J}$ ,  $h = \frac{1}{J}$ ,  $a_{21} = \frac{c_1}{L}$ ,  $a_{22} = \frac{R}{L}$ ,  $b = \frac{1}{L}$ .

Часто модель двигателя представляют в виде одного дифференциального уравнения

$$T_{\text{я}}T_{\text{м}}\ddot{y} + T_{\text{м}}\dot{y} + y = ku - k_{\text{м}}(T_{\text{я}}p + 1)M_{\text{с}}.$$

Здесь  $T_{\text{м}} = JR/c_1c_2$  – электромеханическая постоянная времени двигателя;  $T_{\text{я}} = L/R$  – электромагнитная постоянная времени якорной цепи;  $k = 1/c_1$  – коэффициент усиления;  $k_{\text{м}} = R/c_1c_2$ .

### ПРИМЕР 2.5

Рассмотрим перевернутый маятник, ось которого монтируется на тележке (каретке), перемещающейся в горизонтальном направлении [21].

В совокупности такое устройство представляет собой объект управления, называемый «каретка–маятник». Его схематичная модель показана на рис. 2.3, где использованы следующие определения:

$\varphi$  – угол отклонения маятника (выходная переменная);  $U$  – прикладываемая управляющим двигателем сила (входная переменная);

$s$  – перемещение каретки;

$m_1$  – масса каретки;

$L$  – расстояние между осью и центром тяжести маятника;

$m_2$  – масса маятника;

$J$  – момент инерции относительно центра тяжести;

$g$  – ускорение силы тяжести;

$H$  и  $V$  – горизонтальная и вертикальная силы реакции у оси маятника.

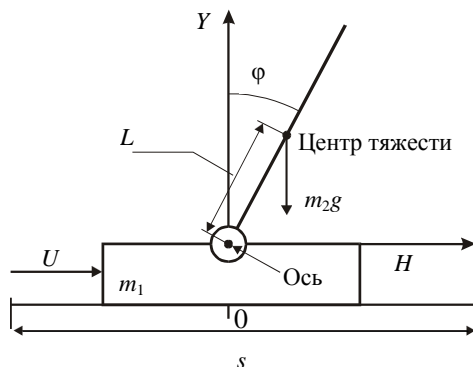


Рис. 2.3. Объект управления «каретка–маятник»

Упрощенная модель объекта «каретка–маятник» может быть представлена системой дифференциальных уравнений [9]

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} - a_4 c \varphi + c \ddot{s} = 0, \\ \ddot{s} = -a_2 \dot{s} + b_2 U, \end{cases}$$

где  $a_2 = \frac{F}{m_2}$ ,  $b_2 = \frac{1}{m_2}$ ,  $a_4 = g$ ,  $c^{-1} = \frac{J + m_1 L^2}{m_1 L}$  – эффективная длина маятника.

При переходе к описанию модели объекта в переменных состояния в качестве компонент вектора состояния можно выбрать следующие величины:

$$x_1 = s, \quad x_2 = \dot{s}, \quad x_3 = s + c^{-1}\varphi,$$

$$x_4(t) = \dot{s}(t) + c^{-1}\dot{\varphi}(t),$$

а выходной переменной объекта является угол отклонения маятника  $y = \varphi$ . В результате уравнения состояния принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_2x_2 + b_2U, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = a_4c(x_3 - x_1), \\ y = c(x_3 - x_1). \end{cases}$$

Определив матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4c & 0 & a_4c & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -c & 0 & c & 0 \end{bmatrix},$$

модель объекта «каретка–маятник» можно представить в векторно-матричной форме (2.1)–(2.2).

## 2.3. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Эта динамическая характеристика используется для описания одно-канальных объектов

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + a_{n-1} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

с нулевыми начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0.$$

**Переходной характеристикой (переходной функцией)  $h(t)$**  называется реакция системы на единичное ступенчатое входное воздействие  $u(t-\tau) = 1(t-\tau)$  при нулевых начальных условиях (см. рис. 2.4).

Отметим, что единичная ступенчатая функция – это функция, которая обладает свойством

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau > 0, \\ 1, & t \geq \tau > 0. \end{cases}$$

Здесь  $\tau$  – момент возникновения входного воздействия.

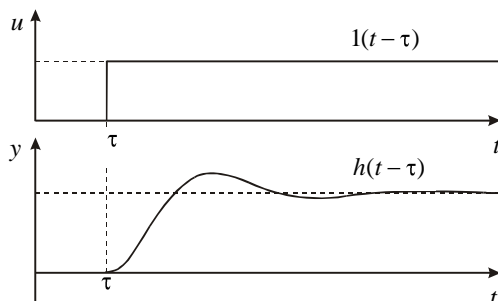


Рис. 2.4. Пример переходной характеристики системы

Для аналитического определения переходной функции следует решить дифференциальное уравнение при нулевых начальных условиях и единичном входном воздействии.

При исследовании реального объекта переходную характеристику можно получить экспериментальным путем, подавая на его вход ступенчатое воздействие и фиксируя реакцию на выходе. Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенчатую функцию  $u(t) = k1(t)$ , то выходная величина будет равна  $y(t) = kh(t)$ , т. е. переходной характеристике с коэффициентом пропорциональности  $k$ .

Зная переходную характеристику, можно вычислить реакцию системы на произвольное входное воздействие с помощью интеграла свертки

$$y(t) = h(t)u(0) + \int_0^t h(t-\theta)\dot{u}(\theta)d\theta, \quad (2.6)$$

где  $\theta$  – переменная интегрирования.

## 2.4. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ

Эта характеристика также используется для описания одноканальных объектов вида (2.5).

**Импульсная переходная функция (характеристика)  $g(t)$**  представляет собой реакцию на входное воздействие типа единичной импульсной функции при нулевых начальных условиях (рис. 2.5). Такое входное воздействие математически отражает дельта-функция, которая обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ \infty, & t = \tau; \end{cases} \quad 2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = 1. \quad (2.7)$$

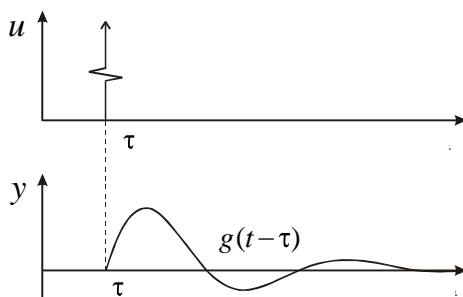


Рис. 2.5. Пример импульсной переходной функции системы

С помощью дельта-функции можно описать реальное входное воздействие типа удара. В действительности импульсные входные воздействия на объект всегда конечны по уровню и продолжительности. Однако если их длительность намного меньше длительности переходных процессов, то с определенной точностью реальный импульс может быть заменен дельта-функцией с некоторым коэффициентом.

Импульсная переходная функция позволяет вычислить реакцию системы на произвольное входное воздействие при нулевых начальных условиях по выражению

$$y(t) = \int_0^t g(t - \theta) u(\theta) d\theta. \quad (2.8)$$

Переходная характеристика и импульсная переходная функция однозначно связаны между собой соотношениями

$$g(t) = \dot{h}(t), \quad h(t) = \int_0^t g(\theta) d\theta. \quad (2.9)$$

Уравнения (2.9) позволяют при одной известной характеристике определить вторую.

Отметим здесь, что переходная и импульсная переходная функции могут использоваться для описания процессов и в бесконечномерных объектах и поэтому они «богаче» конечномерных моделей, какими являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

## 2.5. ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА

Данная динамическая характеристика применяется для описания многоканальных систем вида (2.1) и (2.2).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & x \in R^n, \\ y = Cx, & y \in R^m, \end{cases} \quad n \geq m. \quad (2.10)$$

**Переходная матрица** представляет собой решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \dim \Phi(t) = n \times n \quad (2.11)$$

при единичных начальных условиях

$$\Phi(0) = I, \quad \text{где } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \det \Phi(t) &\neq 0 && \text{для любого } t \in [0, \infty), \\ 2) \Phi^{-1}(t) &= \Phi(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$



Зная переходную матрицу, можно вычислить реакцию системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

на произвольное входное воздействие при любых начальных условиях  $x(0)$  по выражению

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\theta)Bu(\theta)d\theta. \quad (2.13)$$

Здесь первое слагаемое описывает *свободную составляющую движения*, второе – *вынужденную*. Соотношение для выходных переменных следующее:

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_0^t C\Phi(\theta)Bu(\theta)d\theta. \quad (2.14)$$

Если система имеет нулевые начальные условия  $x(0) = 0$ , то выражение (2.14) принимает вид

$$y(t) = \int_0^t G(\theta)u(\theta)d\theta. \quad (2.15)$$

Матрица  $G(t, \theta)$  называется **матричной импульсной переходной функцией**. Каждая ее компонента представляет собой импульсную переходную функцию  $g_{ij}(\theta)$ , которая является реакцией  $i$ -го выхода системы на  $j$ -е импульсное входное воздействие при нулевых начальных условиях и отсутствии остальных входных воздействий

$$G(\theta) = C\Phi(\theta)B. \quad (2.16)$$

Для многоканальных систем может быть определена также **матричная переходная характеристика**

$$H(\theta) = \int_0^t G(\theta)d\theta. \quad (2.17)$$

Для линейных систем с постоянными параметрами переходная матрица  $\Phi(t)$  представляет собой матричную экспоненту

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots, \quad (2.18)$$

где  $\dim e^{At} = n \times n$ .

С учетом (2.18) выражения (2.13) и (2.14) можно записать следующим образом:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta, \quad (2.19)$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta. \quad (2.20)$$

В этом случае матричная импульсная переходная функция линейной системы с постоянными коэффициентами может быть найдена по соотношению

$$G(t, \theta) = Ce^{A(t-\theta)}B. \quad (2.21)$$

При небольших размерах или простой структуре матрицы объекта  $A$  выражение (2.18) можно использовать для точного представления переходной матрицы с помощью элементарных функций.

## 2.6. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями в теории автоматического управления используются различные их преобразования. Для линейных систем дифференциальные уравнения удобно представлять в символической форме с применением оператора дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt},$$

что позволяет записывать дифференциальные уравнения как алгебраические и вводить новую динамическую характеристику – передаточную функцию. Этот способ был предложен английским ученым Хевисайдом в 1895 г., позднее он был строго обоснован аппаратом интегральных преобразований Лапласа и Карсона [11] в предположении нулевых начальных условий.

Рассмотрим этот переход для многоканальных систем общего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m, n \geq m. \end{cases}$$

Запишем уравнение состояния в операторной форме

$$px = Ax + Bu,$$

что позволяет определить вектор состояния

$$x = (pI - A)^{-1}Bu \quad (2.22)$$

и выходные переменные системы

$$y = C(pI - A)^{-1}Bu. \quad (2.23)$$

Матрица взаимосвязи между выходными переменными и управляющими воздействиями в выражении (2.23) называется **матричной передаточной функцией** и обозначается

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B. \quad (2.24)$$

Она имеет размерность  $m \times m$ :

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & \dots & W_{1m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}(p) & \dots & W_{mm}(p) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

где  $W_{ij}(p) = y_i / u_j$  – **скалярные передаточные функции**, которые представляют собой отношение выходной величины к входной в символической форме при нулевых начальных условиях  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$ .

**Собственными передаточными функциями**  $i$ -го канала называются компоненты передаточной матрицы  $W_{ii}(p) = y_i/u_i$ , которые находятся на главной диагонали (2.25). Составляющие, расположенные выше или ниже главной диагонали (2.25), называются **передаточными функциями перекрестных связей** между каналами.

Как известно, обратная матрица  $(pI - A)^{-1}$  может быть найдена по выражению

$$(pI - A)^{-1} = \frac{(pI - A)^{\bullet}}{\det(pI - A)}, \quad (2.26)$$

где  $(pI - A)^{\bullet}$  – присоединенная матрица. Как следует из (2.26), все скалярные передаточные функции в (2.25) содержат одинаковый знаменатель

$$A(p) = \det(pI - A) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1,$$

который называется **характеристическим полиномом** и имеет  $n$ -й порядок.

Если теперь характеристический полином приравнять нулю, то получим характеристическое уравнение системы

$$A(p) = \det(pI - A) = 0. \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) имеет  $n$  корней, которые называются **полюсами** системы  $p_1, \dots, p_n$ .

### ПРИМЕР 2.6

Определить передаточную матрицу для объекта

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^2, u \in R^2, \\ y = Cx, & y \in R^2, \end{cases}$$

где  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

Вспользуемся выражением для передаточной матрицы (2.24) и найдем предварительно обратную матрицу (2.26). Здесь

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & (p-2) \end{bmatrix}.$$

Присоединенная матрица имеет вид

$$(pI - A)^\bullet = \begin{bmatrix} p & 1 \\ -1 & p-2 \end{bmatrix},$$

а характеристический полином –

$$\det(pI - A) = p^2 - 2p + 1.$$

Определим теперь обратную матрицу

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p}{p^2 - 2p + 1} & \frac{1}{p^2 - 2p + 1} \\ \frac{-1}{p^2 - 2p + 1} & \frac{p-2}{p^2 - 2p + 1} \end{bmatrix},$$

и передаточную матрицу объекта в виде

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + 1} & \frac{p-1}{p^2 - 2p + 1} \\ \frac{4}{p^2 - 2p + 1} & \frac{-2(p-2)}{p^2 - 2p + 1} \end{bmatrix}.$$

Как видим, все скалярные передаточные функции из этой матрицы имеют одинаковый знаменатель, который представляет собой характеристический полином объекта.

Чаще всего передаточные функции применяются для описания одноканальных систем вида (2.5)

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_1 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u, \quad n \geq m. \quad (2.28)$$

С использованием оператора дифференцирования  $p$  запишем уравнение (2.28) в символической форме и найдем передаточную функцию как отношение изображений выходной величины ко входной:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1}, \quad (2.29)$$

где  $A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$  – характеристический полином. Его корни,  $\Lambda = p_1, p_2, \dots, p_n$ , называются **полюсами**, а корни полинома числителя передаточной функции,  $N = n_1, n_2, \dots, n_m$ , называются **нулями** системы.

Передаточные функции динамических систем принято записывать в следующей стандартной форме:

$$W(p) = k \frac{d_m p^m + \dots + d_1 p + 1}{c_n p^n + \dots + c_1 p + 1}, \quad (2.30)$$

где  $k = b_0/a_1$  – коэффициент усиления;  $c_j = a_{j+1}/a_1$ ,  $j = \overline{1, (n-1)}$ ;  $c_n = 1/a_1$ ,  $d_i = b_i/b_0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Передаточную матрицу (передаточную функцию) можно также определить с помощью изображений Лапласа или Карсона–Хевисайда. Если подвергнуть одному из этих преобразований обе части дифференциального уравнения и найти соотношения между входными и выходными величинами при нулевых начальных условиях, то получим ту же самую передаточную матрицу (2.24) или функцию (2.29).

Все динамические характеристики объекта взаимосвязаны: получив одну из них, можно определить все остальные. Мы рассмотрели переход от дифференциальных уравнений к передаточным функциям с помощью оператора дифференцирования  $p$ . Используя этот оператор, несложно сделать и обратный переход от передаточной функции к символической форме записи дифференциального уравнения, а затем к стандартному описанию объекта в форме (2.3) или (2.5).

Обсудим теперь взаимосвязь между переходными характеристиками и передаточной функцией. С этой целью запишем выражение для выходной переменной объекта через импульсную переходную функцию в соответствии с (2.8)

$$y(t) = \int_0^t g(t-\theta)u(\theta)d\theta.$$

Подвергнем его преобразованию Лапласа [2, 9, 12]:

$$L[y(t)] = L \left[ \int_0^t g(t-\theta)u(\theta)d\theta \right]$$

и получим соотношение  $y(s) = g(s)u(s)$ , из которого определим  $g(s)$  в виде

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = W(s). \quad (2.31)$$

Таким образом, передаточная функция представляет собой преобразование по Лапласу импульсной переходной функции.

#### ПРИМЕР 2.7

Определить передаточную функцию, нули и полюса для объекта, модель которого задана уравнением

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2\dot{u} + 12u.$$

Запишем исходное уравнение объекта в операторной форме с помощью оператора дифференцирования  $p$

$$(p^2 + 6p + 5)y = (2p + 12)u.$$

Определим теперь передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2p + 12}{p^2 + 6p + 5}.$$

Характеристическое уравнение объекта имеет вид

$$A(p) = p^2 + 6p + 5 = 0.$$

Передаточная функция содержит два полюса ( $p_1 = -5$ ,  $p_2 = -1$ ) и один нуль  $n_1 = -6$ .

#### ПРИМЕР 2.8

Определить передаточную функцию двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (см. рис. 2.2).

Дифференциальное уравнение двигателя получено в примере 2.4 и имеет вид

$$T_{\text{я}}T_{\text{м}}\ddot{y} + T_{\text{м}}\dot{y} + y = ku - k_{\text{м}}(T_{\text{я}}p + 1)M.$$

Будем полагать, что возмущающее воздействие отсутствует, т. е.  $M = 0$ . Запишем это уравнение в символической форме с помощью оператора дифференцирования  $p$

$$T_{\text{я}}T_{\text{м}}p^2y + T_{\text{м}}py + y = ku$$

или, рассматривая его как алгебраическое:

$$T_{\text{я}}T_{\text{м}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1 \quad y = ku.$$

Определим теперь передаточную функцию двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

$$W(p) = \frac{k}{T_{\text{я}}T_{\text{м}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1}.$$

Как видим, она не содержит нулей и имеет два полюса, которые в зависимости от численных значений параметров  $T_{\text{я}}$  и  $T_{\text{м}}$  могут быть вещественными или комплексно-сопряженными.

## 2.7. МОДАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Модальные характеристики соответствуют свободной составляющей движения системы (2.1) или, другими словами, отражают свойства автономной системы (2.10)

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n. \quad (2.32)$$

Будем искать ее решение в виде экспоненты

$$x(t) = e^{\lambda t}\gamma, \quad (2.33)$$

где  $e^{\lambda t}$  – скалярная экспонента,  $\gamma = x(0)$  – вектор начальных условий.

Подставляя решение (2.33) в исходное уравнение (2.32), после преобразований получим

$$[\lambda I - A]\gamma = 0. \quad (2.34)$$



Система уравнений (2.34) будет иметь ненулевое решение относительно  $\gamma$ , если

$$\det[\lambda I - A] = 0. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) есть **характеристическое уравнение** системы и имеет  $n$  корней  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , которые называются **собственными значениями** матрицы  $A$ . При подстановке собственных значений в (2.35) получим

$$\lambda_i I - A \gamma_i = 0$$

( $\gamma_i$  – собственные векторы,  $i = \overline{1, n}$ ).

Совокупность собственных значений и собственных векторов представляет собой **модальные характеристики системы**.

Для (2.32) могут существовать лишь экспоненциальные решения

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} \gamma_i, \quad (2.36)$$

которые называют **модами**. Полное решение системы (2.32) представляет собой линейную комбинацию мод:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \gamma_i. \quad (2.37)$$

Для получения характеристического уравнения системы можно использовать выражение (2.27), т. е. приравнять нулю общий знаменатель передаточной матрицы (передаточной функции).

При исследовании свойств системы ее собственные значения (полюса) удобно изображать в виде точек на комплексной плоскости (рис. 2.6). Такое графическое представление корней характеристического уравнения называют **корневым портретом системы**. С его помощью в ряде случаев можно практически без вычислений оценить качественные свойства процессов, протекающих в линейных системах.

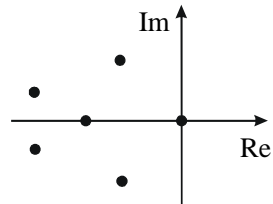


Рис. 2.6. Пример корневого портрета системы

**ПРИМЕР 2.9**

Изобразить корневой портрет объекта, поведение которого описывают следующие уравнения:

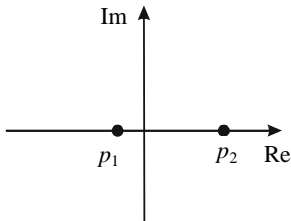


Рис. 2.7. Корневой портрет объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + 2u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Определим матрицу объекта  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

и запишем характеристическое уравнение

$$A(p) = \det(pI - A) = p^2 - 2p - 3 = 0.$$

Собственные значения матрицы  $A$  следующие:  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = 3$ . Они изображены на комплексной плоскости корней в виде точек (рис. 2.7).

## 2.8. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Важными динамическими характеристиками объекта являются его **частотные характеристики**, которые определяют взаимосвязь между параметрами периодических сигналов на входе и выходе. Чаще всего их используют для описания одноканальных объектов:

$$W(p) = k \frac{b_m p^m + \dots + 1}{a_n p^n + \dots + 1}, \quad n \geq m. \quad (2.38)$$

Если на вход объекта подавать гармонический сигнал заданной амплитуды  $A_1$  и частоты  $\omega$ ,

$$u = A_1 \cos \omega t,$$

то на выходе в установившемся режиме у устойчивого объекта (см. гл. 4) будет также гармонический сигнал той же частоты, но в общем случае другой амплитуды со сдвигом по фазе

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Для нахождения соотношения между входным и выходным гармоническими сигналами можно воспользоваться передаточной функцией (2.38), из которой формальной заменой  $p$  на  $j\omega$  получим обобщенную частотную характеристику

$$W(p) = k \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + 1}{a_n(j\omega)^n + \dots + 1}. \quad (2.39)$$

Ее можно представить в виде

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jI(\omega). \quad (2.40)$$

Составляющие обобщенной частотной характеристики  $W(j\omega)$  имеют самостоятельное значение и следующие названия:

$R(\omega)$  – **вещественная частотная характеристика (ВЧХ)**,

$I(\omega)$  – **мнимая частотная характеристика (МЧХ)**,

$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$  – **амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)**,

$\varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$  – **фазовая частотная характеристика (ФЧХ)**.

Для исследования частотных свойств объекта или системы удобно использовать графическое представление частотных характеристик. В этом случае обобщенная частотная характеристика  $W(j\omega)$  может быть построена на комплексной плоскости в соответствии с выражением (2.40), когда каждому значению частоты  $\omega_i$  соответствует вектор  $W(j\omega_i)$ . При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  конец этого вектора «прочерчивает» на комплексной плоскости кривую, которая называется **амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ)**.

Наряду с амплитудно-фазовой характеристикой (рис. 2.8) можно построить все остальные частотные характеристики. Так, амплитудная частотная характеристика показывает, как звено пропускает сигналы различной частоты;

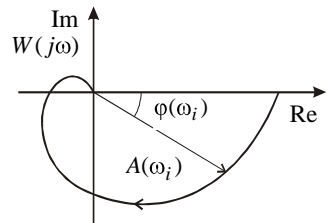


Рис. 2.8. Пример амплитудно-фазовой характеристики системы

причем оценкой пропускания является отношение амплитуд выходного ( $A_2$ ) и входного сигналов ( $A_1$ ). Фазовая частотная характеристика отражает фазовые сдвиги, вносимые системой на различных частотах.

Наряду с рассмотренными частотными характеристиками в теории автоматического управления используются **логарифмические частотные характеристики**. Удобство работы с ними объясняется тем, что операции умножения и деления заменяются на операции сложения и вычитания, а это позволяет во многих случаях строить их практически без вычислений.

Амплитудная частотная характеристика, построенная в логарифмическом масштабе,

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (2.41)$$

называется **логарифмической амплитудно-частотной характеристикой** (ЛАЧХ). При этом амплитуда измеряется в децибелах (дБ). При изображении ЛАЧХ (рис. 2.9) удобнее по оси абсцисс откладывать частоту также в логарифмическом масштабе, т. е.  $\lg \omega$ , выраженную в декадах (дек.).

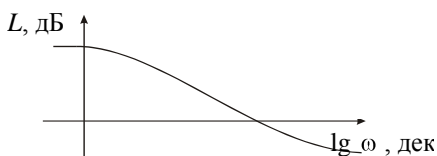


Рис. 2.9. Пример логарифмической амплитудно-частотной характеристики

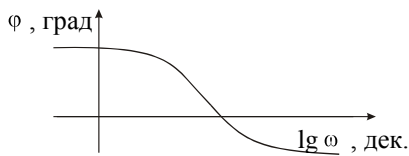


Рис. 2.10. Пример логарифмической фазовой частотной характеристики

На практике применяется также и **логарифмическая фазово-частотная характеристика**. При ее изображении используется ось абсцисс, на которой указывают частоту в логарифмическом масштабе, а по оси ординат откладывают фазу в градусах в линейном масштабе (рис. 2.10).

Отметим, частотные характеристики можно использовать и для описания бесконечномерных объектов, если их получать экспериментально.

**ПРИМЕР 2.10**

Для объекта с заданной передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10p}{p+1}$$

построить амплитудно-фазовую (АФХ), вещественную частотную и фазовую частотную характеристики (ВЧХ, ФЧХ).

Запишем выражение для обобщенной частотной характеристики, сделав замену в передаточной функции  $p \rightarrow j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{10j\omega}{j\omega+1} = \frac{10\omega^2}{\omega^2+1} + j \frac{10\omega}{\omega^2+1}.$$

Выражения для ВЧХ и ФЧХ имеют вид

$$R(\omega) = \frac{10\omega^2}{\omega^2+1}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \arctg \frac{1}{\omega}.$$

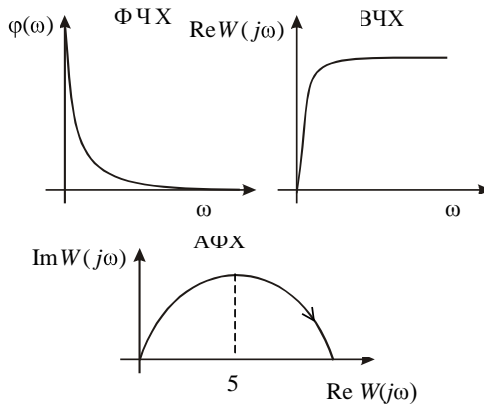


Рис. 2.11. Частотные характеристики для примера 2.10

Соответствующие частотные характеристики, построенные при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , показаны на рис. 2.11.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта глава является в некотором смысле вводной для всех последующих. В ней приведены основные способы представления математических моделей, которые в дальнейшем будут использованы для исследования свойств объектов и систем управления. Понятно, что введенные здесь характеристики отражают их поведение не только в динамике, но и в статике, поскольку статический режим представляет собой предел переходных процессов.

Наряду с динамическими характеристиками, которые используются в «классической» теории управления (переходные характеристики, передаточные функции, частотные характеристики), здесь рассмотрены также модальные характеристики и приведено описание объектов в переменных состояния. Дальнейшее содержание не требует более широких сведений о характеристиках систем, хотя в научной литературе есть попытки их описания с использованием и других математических конструкций.

Обращаем внимание на то, что ни одна математическая модель не может абсолютно точно отражать свойства физической системы, как бы ни повышали ее сложность с целью уточнения. Поэтому обычно стремятся получить модель, которая достаточно адекватно отражает свойства реального устройства и не является слишком сложной. В дальнейшем, говоря об объекте или системе, будем иметь в виду их математическую модель, представленную одной из динамических характеристик.

## ЗАДАЧИ

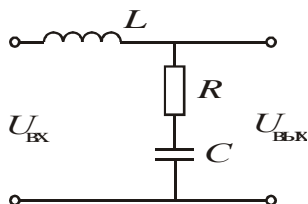


Рис. 2.12. Схема к задаче 2.1

**2.1.** Для схемы, изображенной на рис. 2.12, записать дифференциальное уравнение относительно входной и выходной переменных, если  $R = 400 \text{ Ом}$ ,  $C = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Ф}$ ,  $L = 100 \text{ Гн}$ .

**2.2.** Записать уравнения математической модели, определить передаточную функцию, нули и полюса для объекта, схема которого приведена:

на рис. 2.13, *а*, где  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ,  $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкФ}$ ;

на рис. 2.13, *б*, где  $L_1 = 1 \text{ Гн}$ ,  $L_2 = 1 \text{ Гн}$ ,  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ .

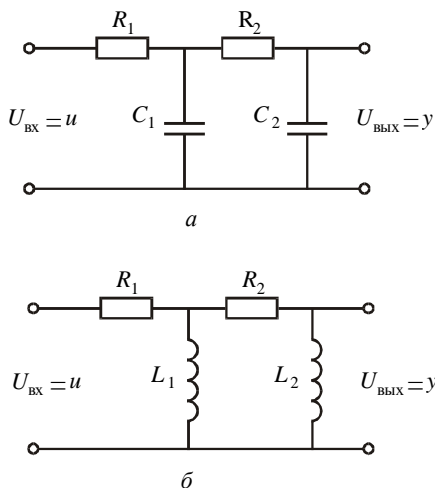


Рис. 2.13. Схемы к задаче 2.2

**2.3.** Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных

$$0,5\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y + 2u = 1,5u.$$

Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

**2.4.** Дифференциальное уравнение объекта имеет вид

$$\ddot{y} + 3\dot{y} - \dot{y} + y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 5u.$$

Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

**2.5.** Известно описание объекта в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u, \\ y = 0,1x_1. \end{cases}$$

Определить матрицы коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Записать дифференциальное уравнение объекта относительно  $y$ ,  $u$ .

**2.6.** Найти передаточную функцию, полюса и нули объекта, математическая модель которого имеет вид:

а)  $2\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = u$  ;

б)  $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\dot{u} + 3u + u$  ;

в)  $\ddot{y} + 7\dot{y} - 5y = \dot{u} + 5u$ .

**2.7.** Определить передаточную функцию  $W(p) = y(p)/u(p)$ , если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_2 + 4x_1 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

**2.8.** Известна модель объекта в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 0,5x_2 + 4u_1, \\ \dot{x}_2 = -0,1x_1 - x_2 + 0,4u_2, \\ y_1 = 2x_1, \\ y_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Определить матричную передаточную функцию.



**2.9.** Известны матрицы объекта  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти его матричную передаточную функцию.

**2.10.** Перейти от передаточной функции к модели объекта в переменных состояниях:

$$\text{а) } W(p) = \frac{5}{(p^2 + 7p + 3)}; \quad \text{б) } W(p) = \frac{4p + 3}{4p^3 + 8p^2 + 8p + 3};$$

$$\text{в) } W(p) = \frac{4}{(2p^3 + 0,8p^2 + 6p + 0,4)}.$$

**2.11.** Записать аналитические выражения для всех частотных характеристик, если известна передаточная функция объекта:

$$\text{а) } W(p) = \frac{4}{(2p^2 + p)}; \quad \text{б) } W(p) = \frac{8p}{(4p^2 + 4p + 1)};$$

$$\text{в) } W(p) = \frac{10}{(p+1)(0,1p+1)}.$$

**2.12.** Построить амплитудно-фазовую характеристику объекта, поведение которого описывает следующая модель в переменных состояниях:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 2u, \\ y = x_1 + 5x_2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + u, \\ y = x_1 - x_2. \end{cases}$$

**2.13.** Построить ЛАЧХ объекта, если его АЧХ имеет следующий вид:

$$\text{а) } A(\omega) = \frac{100}{\sqrt{\omega^2 + 1}}; \quad \text{б) } A(\omega) = \frac{10\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega^2 \sqrt{0,01\omega^2 + 1}}.$$

**2.14.** Построить ВЧХ и МЧХ для объекта со следующей передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{4}{4p^2 + p + 1}.$$

---

---

## Г л а в а 3

# СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД

---

---

**Д**ля расчета различных систем автоматического управления их обычно разделяют на отдельные элементы, динамическими характеристиками которых являются дифференциальные уравнения не выше второго порядка. Причем различные по своей физической природе элементы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями, поэтому их относят к определенным классам, называемым **типовыми звеньями**.

Изображение системы в виде совокупности типовых звеньев с указанием связей между ними называется **структурной схемой**. Она может быть получена на основе как дифференциальных уравнений, так и передаточных функций. Этот способ и составляет суть **структурного метода** как метода представления систем автоматического управления различной физической природы.

Хотя структурный метод не предлагает новых способов расчета, он позволяет наглядно представить взаимосвязь элементов системы и оценить при наличии соответствующего опыта отдельные свойства переходных и статических процессов. Он настолько широко используется в практике проектирования, что, по существу, может считаться одним из «языков», на котором обсуждаются свойства систем автоматического управления.

Рассмотрим подробнее отдельные типовые звенья и их различные динамические характеристики.

## 3.1. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

### 3.1.1. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ (УСИЛИТЕЛЬНОЕ) ЗВЕНО

**Пропорциональным** называется звено, поведение которого описывает алгебраическое уравнение

$$y = ku, \quad (3.1)$$

где  $k$  – коэффициент усиления. Строго говоря, это звено не является динамическим, но относится к типовым.

Примерами таких звеньев могут служить безынерционные усилители, механические редукторы, многие датчики сигналов и т. д.

Передаточная функция звена следующая:

$$W(p) = \frac{y}{u} = k. \quad (3.2)$$

Переходная характеристика (реакция звена на скачкообразное входное воздействие  $1(t)$ ) имеет вид

$$h(t) = k1(t).$$

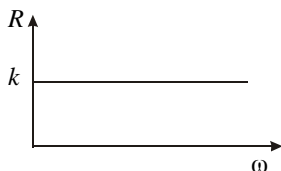
Импульсная переходная функция пропорционального звена определяется выражением

$$g(t) = k\delta(t).$$

Модальные характеристики (собственные значения и собственные векторы) для него отсутствуют.

Заменив в передаточной функции  $p$  на  $j\omega$ , получим выражения для частотных характеристик. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой точку на комплексной плоскости в соответствии с формулой

$$W(j\omega) = k.$$



Вещественная частотная характеристика (рис. 3.1) соответствует выражению

$$R(\omega) = k,$$

Рис. 3.1. Вещественная частотная характеристика пропорционального звена

а мнимая частотная характеристика отсутствует  $I(\omega) = 0$ .

Амплитудно-частотная характеристика может быть построена по соотношению

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = R(\omega) = k \quad (3.3)$$

и имеет тот же вид, что и ВЧХ. Выражение для ФЧХ следующее:

$$\varphi(\omega) = \arctg I(\omega)/R(\omega) = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, при прохождении через пропорциональное звено амплитуда периодического входного сигнала изменяется в  $k$  раз, а фазовый сдвиг отсутствует.

Амплитудно-фазовая характеристика звена имеет вид точки на комплексной плоскости (рис. 3.2).

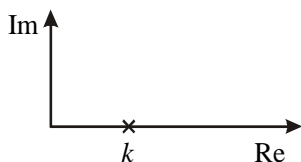


Рис. 3.2. Амплитудно-фазовая характеристика звена

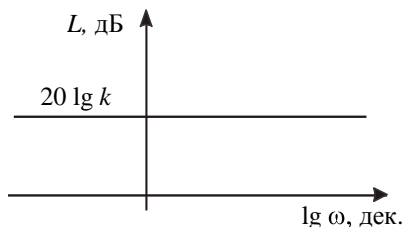


Рис. 3.3. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пропорционального звена

Логарифмическая АЧХ звена представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k. \quad (3.5)$$

Как следует из выражений (3.3), (3.4) и рис. 3.3, пропорциональное звено пропускает входные сигналы без искажений.

### 3.1.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

**Дифференцирующим** называется звено, которое описывается дифференциальным уравнением

$$y = ki\dot{i}. \quad (3.6)$$

Его передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = kp. \quad (3.7)$$

Примером дифференцирующего звена может служить тахогенератор постоянного тока при оценке производной от положения вала двигателя.

Переходная характеристика дифференцирующего звена определяется выражением

$$h(t) = k\delta(t)$$

и имеет вид  $\delta$ -функции (рис. 3.4).

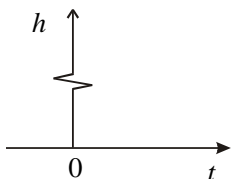


Рис. 3.4. Переходная характеристика звена

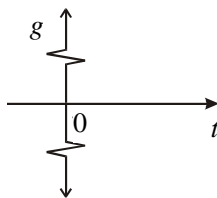


Рис. 3.5. Импульсная переходная характеристика

Импульсная переходная функция (рис. 3.5) представляет собой «дуплет»  $\delta$ -функций

$$g(t) = k\dot{\delta}(t). \quad (3.8)$$

Рассмотрим теперь частотные характеристики звена. Амплитудно-фазовая характеристика

$$W(j\omega) = jk\omega$$

совпадает с положительной мнимой полуосью комплексной плоскости; вещественная частотная характеристика равна нулю,  $R(\omega) = 0$ ; мнимая частотная характеристика соответствует выражению

$$I(\omega) = k\omega,$$

т. е. представляет собой линейно нарастающую функцию. С ней совпадает амплитудно-частотная характеристика, выражение для которой имеет вид

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = I(\omega) = k\omega.$$

Фазовую частотную характеристику можно определить по соотношению

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = 90^\circ.$$

Следовательно, на всех частотах имеется постоянный фазовый сдвиг, равный  $90^\circ$ .

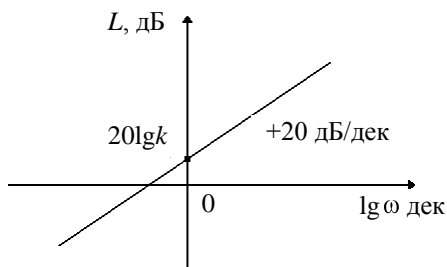


Рис. 3.6. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего звена

Логарифмическая частотная характеристика следующая:

$$L(\omega) = 20 \lg k\omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (3.9)$$

Как видно из графика на рис. 3.6, дифференцирующее звено усиливает высокочастотные ( $\omega > 1$ ) сигналы и ослабляет низкочастотные ( $\omega < 1$ ).

### 3.1.3. ИНТЕГРИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

**Интегрирующим** называется звено, поведение которого описывает уравнение

$$y = k \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0). \quad (3.10)$$

Примером интегрирующего звена является операционный усилитель в режиме интегрирования.

Основной динамической характеристикой звена является его дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = ku, \quad (3.11)$$

на основе которого можно получить передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k}{p}. \quad (3.12)$$

Характеристическое уравнение

$$A(p) = p = 0$$

имеет единственный корень (полюс),  $p = 0$ , который представляет собой модальную характеристику интегрирующего звена.

Переходная характеристика звена имеет вид линейно возрастающей функции

$$h(t) = k \int_0^t 1(\tau) d\tau = kt \cdot 1(t), \quad (3.13)$$

а импульсная переходная функция – ступенчатой функции

$$g(t) = k \int_0^t \delta(\tau) d\tau = k1(t). \quad (3.14)$$



Выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики (рис. 3.7) получим, заменив в (3.12)  $p$  на  $j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}.$$

Таким образом, АФХ интегрирующего звена имеет вид прямой, совпадающей с отрицательной мнимой полуосью комплексной плоскости.

Вещественная частотная характеристика отсутствует,  $R(\omega) = 0$ . Выражение для мнимой частотной характеристики имеет вид

$$I(\omega) = -\frac{k}{\omega},$$

а для амплитудной частотной характеристики

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

При этом фазовая частотная характеристика соответствует соотношению

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = -90^\circ, \quad (3.15)$$

т. е. звено имеет постоянный фазовый сдвиг, который не зависит от частоты.

Запишем выражение для логарифмической амплитудно-частотной характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega \quad (3.16)$$

и изобразим ее график (рис. 3.8).

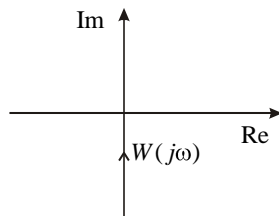


Рис. 3.7. Амплитудно-фазовая характеристика интегрирующего звена

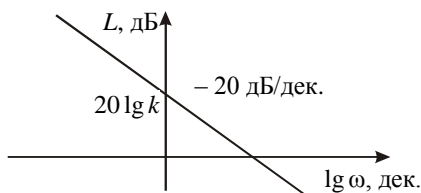


Рис. 3.8. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика интегрирующего звена

Как видим, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика интегратора представляет собой прямую с наклоном  $-20$  дБ/дек. и пересекает ось ординат в точке  $20 \lg k$ . Она показывает, что звено усиливает низкочастотные сигналы и ослабляет высокочастотные.

### 3.1.4. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО

**Апериодическим** называется звено, дифференциальное уравнение которого имеет вид

$$\dot{y} + a_0 y = bu. \quad (3.17)$$

Различного типа двигатели могут быть примерами такого звена.

Дифференциальное уравнение аperiодического звена принято записывать в стандартном виде:

$$T\dot{y} + y = ku, \quad (3.18)$$

где  $T = 1/a_0$  – постоянная времени;  $k = b/a_0$  – коэффициент усиления звена.

Заменив в (3.18)  $d/dt$  на  $p$ , перейдем к символической записи дифференциального уравнения

$$(Tp + 1)y = ku \quad (3.19)$$

и найдем передаточную функцию аperiодического звена:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (3.20)$$

Для определения модальных характеристик по передаточной функции (3.20) запишем характеристическое уравнение

$$A(p) = Tp + 1 = 0. \quad (3.21)$$

Оно имеет единственный корень (полос),  $p = -1/T$ .

Переходную характеристику звена (рис. 3.9) можно найти как решение уравнения (3.18) при  $u = 1(t)$  и  $y(0) = 0$ :

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t). \quad (3.22)$$

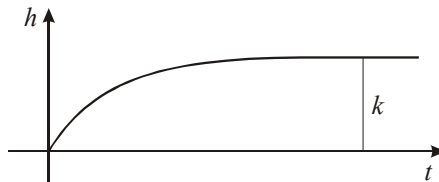


Рис. 3.9. Переходная характеристика

Импульсную переходную функцию (рис. 3.10) вычислим по соотношению

$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} 1(t). \quad (3.23)$$

Выражение, соответствующее амплитудно-фазовой характеристике апериодического звена, имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{(1 - Tj\omega)k}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{T\omega k}{1 + T^2\omega^2}. \quad (3.24)$$

По выражению

$$R(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} \quad (3.25)$$

можно построить его вещественную частотную характеристику (рис. 3.11).

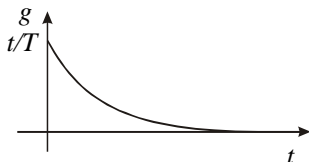


Рис. 3.10. Импульсная переходная функция

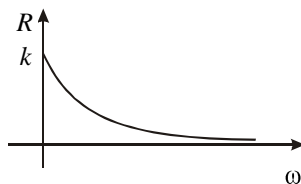


Рис. 3.11. Вещественная частотная характеристика аperiodического звена

Мнимая частотная характеристика (рис. 3.12) аperiodического звена соответствует уравнению

$$I(\omega) = -\frac{T\omega k}{1 + T^2\omega^2}. \quad (3.26)$$

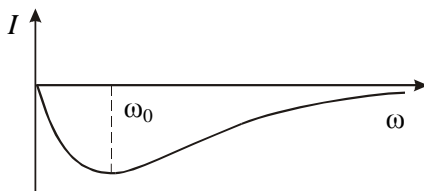


Рис. 3.12. Мнимая частотная характеристика аperiodического звена

Амплитудно-частотную характеристику (рис. 3.13) описывает выражение

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (3.27)$$

Фазовая частотная характеристика звена определяется соотношением

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \arctg(-\omega T). \quad (3.28)$$

Она представляет собой кривую (рис. 3.14) с пределом  $\varphi(\infty) = -\pi/2$ .

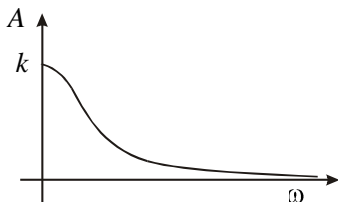


Рис. 3.13. АЧХ аperiodического звена

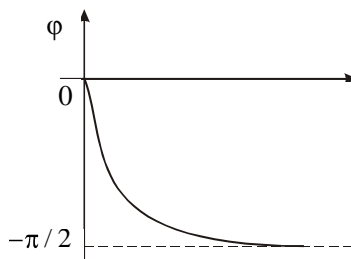


Рис. 3.14. ФЧХ аperiodического звена

На комплексной плоскости по выражению (3.24) можно построить амплитудно-фазовую характеристику аperiodического звена, которая имеет вид полуокружности (рис. 3.15).

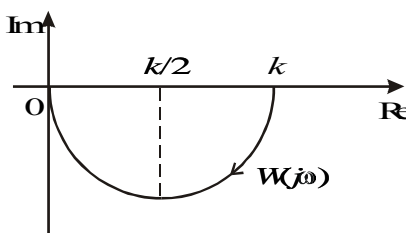


Рис. 3.15. Амплитудно-фазовая характеристика аperiodического звена

Запишем выражение для логарифмической амплитудно-частотной характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg 1 + T^2 \omega^2 . \quad (3.29)$$

Наиболее просто для звена можно построить асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику. В этом случае следует рассмотреть отдельно области высоких и низких частот и для каждой определить свою асимптоту:

1) в области низких частот, когда  $\omega \ll 1/T$ , вместо точной ЛАЧХ (3.29) можно рассмотреть приближенную

$$L_1(\omega) = 20 \lg k; \quad (3.30)$$

2) в области высоких частот при  $\omega \gg 1/T$  вторая асимптота имеет вид

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg(T\omega). \quad (3.31)$$

На частоте  $\omega_0 = 1/T$ , которая называется **собственной частотой** аperiodического звена, справедливо условие

$$L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0).$$

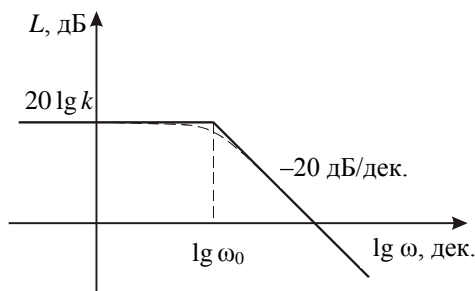


Рис. 3.16. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена

Точная характеристика звена на рис. 3.16 показана пунктирной линией и несколько отличается от асимптотической ЛАЧХ, причем наибольшая погрешность будет на собственной частоте  $\omega_0$ .

### 3.1.5. ФОРСИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

**Форсирующим** называется звено, дифференциальное уравнение которого имеет вид

$$y = k_1 u + k_2 \dot{u}. \quad (3.32)$$

Нетрудно убедиться в том, что (3.32) можно представить как сумму уравнений пропорционального и дифференцирующего звеньев.

Передаточную функцию форсирующего звена

$$W(p) = \frac{y}{u} = k_1 + k_2 p$$

принято записывать в стандартной форме

$$W(p) = k(1 + Tp), \quad (3.33)$$

где  $k = k_1$  – коэффициент усиления, а  $T = k_2/k_1$  – постоянная времени звена.

Передаточная функция (3.33) содержит полином в числителе, корень которого  $n = -1/T$  называется «нулем» форсирующего звена.

Его переходная характеристика определяется соотношением

$$h(t) = k_1 1(t) + k_2 \delta(t). \quad (3.34)$$

Качественный вид ее приведен на рис. 3.17.

Импульсная переходная функция звена следующая:

$$g(t) = \dot{h}(t) = k_1 \delta(t) + k_2 \dot{\delta}(t). \quad (3.35)$$

Обобщенная частотная характеристика находится по передаточной функции (3.33) и имеет вид

$$W(j\omega) = k(1 + jT\omega). \quad (3.36)$$

Соответствующая амплитудно-фазовая характеристика изображена на рис. 3.18.

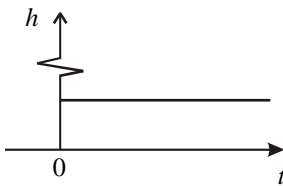


Рис. 3.17. Переходная характеристика форсирующего звена

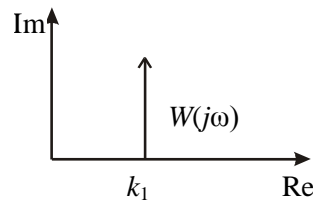


Рис. 3.18. Амплитудно-фазовая характеристика форсирующего звена

Вещественная частотная характеристика звена не зависит от частоты и равна  $R(\omega) = k$ , мнимая частотная характеристика представляет собой прямую

$$I(\omega) = kT\omega.$$

Амплитудно-частотная характеристика может быть построена по выражению

$$A(\omega) = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2},$$

а фазовая частотная характеристика –

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega T), \quad (3.37)$$

причем в пределе  $\varphi(\infty) = \pi/2$ .

На основании выражения для  $A(\omega)$  определим логарифмическую амплитудно-частотную характеристику

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 10 \lg(1 + T^2 \omega^2). \quad (3.38)$$

Как и в предыдущем случае, для форсирующего звена удобнее строить не точную, а асимптотическую ЛАЧХ (рис. 3.19). Здесь  $\omega_0 = 1/T$  – собственная частота звена.

Причем ее можно получить, исследуя отдельно области низких и высоких частот или суммируя ЛАЧХ пропорционального и дифференцирующего звеньев.

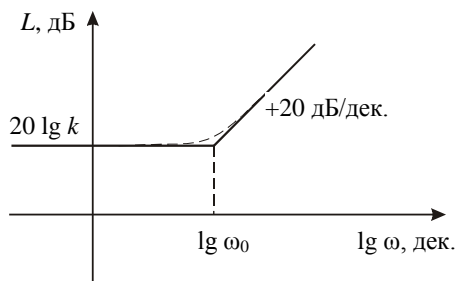


Рис. 3.19. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика форсирующего звена



Нетрудно убедиться, сравнивая выражения (3.28) и (3.29) с выражениями (3.37) и (3.38), в том, что логарифмические амплитудно-частотная и фазовая частотная характеристики форсирующего звена представляют собой зеркальное отображение относительно оси абсцисс соответствующих логарифмических характеристик апериодического звена.

### 3.1.6. ЗВЕНО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение звена второго порядка

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = bu \quad (3.39)$$

принято записывать в стандартном виде

$$T^2 \ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = ku, \quad (3.40)$$

где  $T = \sqrt{1/a_0}$  – постоянная времени звена;  $d$  – коэффициент демпфирования, который определяет склонность переходных процессов к колебаниям,  $2dT = a_1/a_0$ ;  $k = b/a_0$  – коэффициент усиления.

Передаточную функцию звена получим на основе символической записи дифференциального уравнения

$$T^2 p^2 y + 2dTpy + y = ku$$

в виде

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}. \quad (3.41)$$

Для определения модальных характеристик запишем характеристическое уравнение звена

$$T^2 p^2 + 2dTp + 1 = 0. \quad (3.42)$$

Оно имеет два корня (полюса), которые в зависимости от коэффициента демпфирования  $d$  могут быть вещественными или комплексно-сопряженными, что приводит к различным переходным процессам. Рассмотрим варианты корней.

1. Если  $d \geq 1$ , то корни уравнения (3.42) вещественные и отрицательные. Обозначим их через  $p_1 = \lambda_1$ ,  $p_2 = \lambda_2$  и получим переходную функцию (рис. 3.20) в виде

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + k1(t). \quad (3.43)$$

2. Если  $0 \leq d < 1$ , то корни уравнения (3.42) будут комплексно-сопряженными, т. е.  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$  ( $\alpha > 0$ ). При  $d = 0$  получаем  $p_{1,2} = \pm j\beta$ .

В случае, когда коэффициент демпфирования изменяется в диапазоне  $0 < d < 1$ , звено второго порядка называют **колебательным**. Выражение для его переходной характеристики:

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha t} (\cos \beta t + c_2) + k1(t). \quad (3.44)$$

Причем колебательность переходного процесса будет тем больше, чем меньше коэффициент демпфирования  $d$ . В пределе при  $d = 0$  будут иметь место незатухающие колебания. В этом случае звено называется **консервативным**. Соответствующие графики переходных процессов представлены на рис. 3.21.

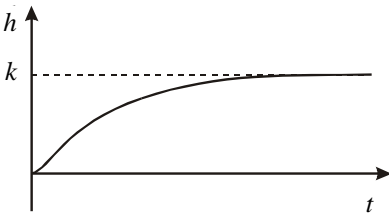


Рис. 3.20. Переходная характеристика звена второго порядка при  $d \geq 1$

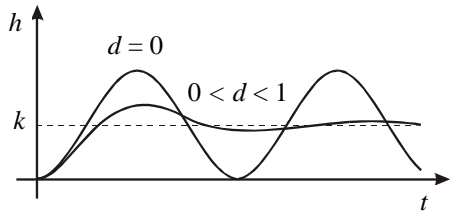


Рис. 3.21. Переходная характеристика звена при  $0 \leq d < 1$

Выражение для частотной характеристики колебательного звена имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + 2dTj\omega + (-T^2\omega^2)} = \frac{k - kT^2\omega^2 - jk2dT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}; \quad (3.45)$$

для вещественной частотной характеристики:

$$R(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \quad (3.46)$$

и мнимой частотной характеристики:

$$I(\omega) = -\frac{k2dT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}. \quad (3.47)$$

На основе (3.46) и (3.47) построим АЧХ на комплексной плоскости, рассматривая характерные точки:  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1/T, \dots, \omega \rightarrow \infty$ . Ее вид существенно зависит от коэффициента демпфирования  $d$  (рис. 3.22).

Амплитудно-фазовая характеристика консервативного звена ( $d = 0$ ) начинается в точке  $k$  на вещественной оси и при увеличении  $\omega$  стремится к  $+\infty$ , а затем из  $-\infty$  к началу координат.

Амплитудная частотная характеристика строится на основе выражения

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}} \quad (3.48)$$

и может иметь резонансный пик, высота которого будет тем больше, чем меньше коэффициент демпфирования  $d$ .

Формула для фазовой частотной характеристики имеет вид

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2d\omega T}{1 - \omega^2 T^2}. \quad (3.49)$$

Построение ЛАЧХ колебательного звена (при  $0 < d < 1$ ) осуществляется по соотношению, полученному из (3.48):

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}. \quad (3.50)$$

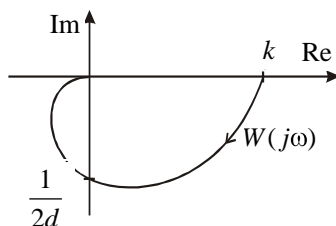


Рис. 3.22. Амплитудно-фазовая характеристика звена второго порядка

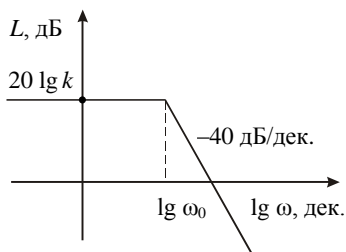


Рис. 3.23. Асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена при  $0,3 \leq d \leq 1$

При значениях коэффициента демпфирования в интервале  $0,3 \leq d \leq 1$  можно строить упрощенную асимптотическую ЛАЧХ, рассматривая отдельно области высоких и низких частот.

В области низких частот  $\omega \ll 1/T$  асимптота имеет вид

$$L_1(\omega) = 20 \lg k.$$

В области высоких частот, когда  $\omega \gg 1/T$ , получим вторую асимптоту (рис. 3.23)

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg(T\omega).$$

На **собственной частоте** колебательного звена  $\omega_0 = 1/T$  справедливо соотношение  $L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0)$ .

Наибольшее отличие асимптотической ЛАЧХ от действительной характеристики наблюдается на частоте  $\omega_0$  (рис. 3.24) и зависит от величины коэффициента демпфирования.

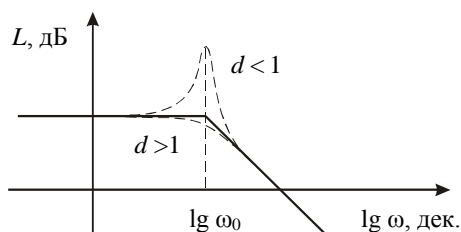


Рис. 3.24. Влияние коэффициента демпфирования на ЛАЧХ звена

При значениях  $d < 0,3$  не следует пользоваться асимптотической ЛАЧХ, а нужно строить точную логарифмическую характеристику.

При  $d > 1$  корни характеристического уравнения (3.42) будут вещественными и передаточную функцию звена второго порядка (3.41) можно представить в виде произведения двух передаточных функций аperiodических звеньев:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dT p + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (3.51)$$

где  $T_1 = 1/\lambda_1$ ,  $T_2 = 1/\lambda_2$  – постоянные времени аperiodических звеньев. В этом случае асимптотическая ЛАЧХ звена второго порядка имеет два «излома» на частотах  $\omega_1 = 1/T_1$ ,  $\omega_2 = 1/T_2$ .

Она может быть получена суммированием асимптотических ЛАЧХ двух аperiodических звеньев.

## 3.2. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

**Структурной схемой** будем называть графическую модель системы, в которой каждому элементу ставится в соответствие его динамическая характеристика.

Такая схема наглядно отражает состав системы и связи между отдельными ее составляющими.

При изображении структурной схемы будем придерживаться следующих обозначений ее элементов:

- *блок* с указанной внутри него динамической характеристикой элемента; входной и выходной сигналы блока обозначаются стрелками (рис. 3.25);

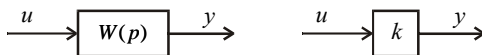


Рис. 3.25. Изображение блоков на структурной схеме

- *сумматор* (рис. 3.26), выход которого равен сумме входных сигналов. Знак каждого сигнала может быть указан возле соответствующего входа (рис. 3.26, а) или внутри сумматора; при этом знак «-» относится к перпендикулярно входящему сигналу (рис. 3.26, б);



Рис. 3.26. Условное изображение сумматора на структурной схеме

• *интегратор* на структурной схеме будем условно обозначать символом интегрирования (рис. 3.27, а) или в операторной форме (рис. 3.27, б).

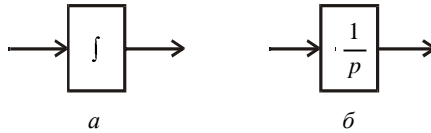


Рис. 3.27. Условное изображение интегратора

Структурная схема может быть построена на основе как дифференциальных уравнений, так и передаточных функций.

Отметим, что переход от исходной передаточной функции или уравнения системы к ее структурной схеме может иметь несколько вариантов решения. Возможен и обратный переход, т. е. на основе структурной схемы можно получить дифференциальное уравнение системы, причем эта задача имеет единственное решение.

Рассмотрим вначале структурные схемы, которые получены с использованием передаточных функций. При таком представлении внутри блока указываются передаточная функция звена, а также входной и выходной сигналы (см. рис. 3.25). Для упрощения структуры системы применяются различные ее преобразования, приведем основные из них.

### 3.3. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

#### 3.3.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ

Рассмотрим последовательное соединение типовых звеньев с передаточными функциями  $W_i(p)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и найдем выражение для общей передаточной функции, связывающей между собой входной и выходной сигналы системы (рис. 3.28).



Рис. 3.28. Последовательное соединение  $m$  звеньев

*Правило:* передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев, т. е.

$$W(p) = \frac{y}{u} = \prod_{i=1}^m W_i(p). \quad (3.52)$$

В этом нетрудно убедиться, если выходную переменную системы представить в виде произведения передаточной функции звена и соответствующего входного сигнала

$$y = W_m(p)x_{m-1} = W_m(p)W_{m-1}(p)x_{m-2} = W_m(p) \cdots W_1(p)u.$$

Отношение выходного сигнала системы  $y$  к ее входному сигналу  $u$  представляет собой общую передаточную функцию (3.52) соединения.

### 3.3.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ

*Правило:* передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \sum_{i=1}^m W_i(p). \quad (3.53)$$

Параллельное соединение звеньев показано на рис. 3.29.

Выходной сигнал системы представляет собой сумму выходных сигналов отдельных звеньев

$$\begin{aligned} y &= y_1 + \dots + y_m = \\ &= W_1(p)u + \dots + W_m(p)u, \end{aligned}$$

следовательно, общая передаточная функция параллельного соединения имеет вид (3.53).

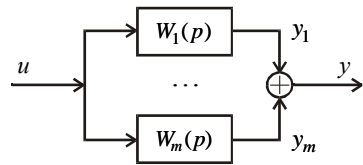


Рис. 3.29. Иллюстрация параллельного соединения звеньев

### 3.3.3. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

Такое соединение звеньев показано на рис. 3.30, причем знак «-» внутри сумматора означает отрицательную обратную связь.

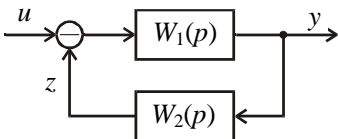


Рис. 3.30. Структурная схема системы с обратной связью

Для определения общей передаточной функции запишем выражение для выходной переменной системы

$$y = W_1(p)[u - z] = W_1(p)[u - W_2(p)y].$$

После преобразований получим

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (3.54)$$

*Правило:* передаточная функция системы с отрицательной обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого канала  $W_1(p)$ , а знаменатель представляет собой сумму единицы и произведения передаточных функций прямого и обратного каналов системы.

В случае положительной обратной связи формула (3.54) принимает вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \quad (3.55)$$

На практике обычно встречаются системы с отрицательной обратной связью, для которых передаточная функция находится по соотношению (3.54).

### 3.3.4. ПРАВИЛО ПЕРЕНОСА

В некоторых случаях для получения общей передаточной функции системы с помощью структурных преобразований удобнее было бы перенести точку приложения сигнала через звено ближе к выходу или входу. При таком преобразовании структурной схемы следует придерживаться *правила:* передаточная функция системы должна оставаться неизменной.



Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения сигнала переносится через звено ближе к выходу. Исходная структура системы показана на рис. 3.31. Определим для нее результирующую передаточную функцию

$$W(p) = W_2(p) W_1(p) + W_3(p). \quad (3.56)$$

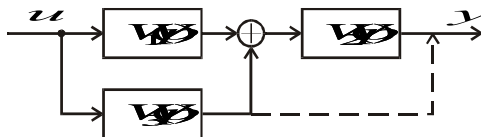


Рис. 3.31. Структурная схема исходной системы

Перенесем точку приложения сигнала через звено с передаточной функцией  $W_2(p)$ , добавив в этот канал некоторую передаточную функцию  $W_4(p)$ . Получим структурную схему преобразованной системы (рис. 3.32). Для нее передаточная функция имеет вид

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p)W_4(p). \quad (3.57)$$

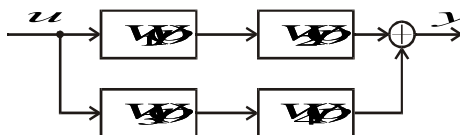


Рис. 3.32. Структурная схема преобразованной системы

Поскольку при преобразовании структуры системы ее передаточная функция не должна измениться, приравняв правые части выражений (3.56) и (3.57), определим искомую передаточную функцию  $W_4(p)$ :

$$W_4(p) = W_2(p). \quad (3.58)$$

Таким образом, при переносе точки приложения сигнала ближе к выходу системы в канал следует добавить передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

Аналогичное *правило* можно сформулировать для переноса точки приложения сигнала ближе к входу системы: в соответствующий канал следует добавить обратную передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

### ПРИМЕР 3.1

Определить общую передаточную функцию системы, структурная схема которой показана на рис. 3.33.

Предварительно найдем передаточные функции типовых соединений звеньев: передаточная функция параллельного соединения звеньев

$$\bar{W}_1(p) = W_1(p) + W_2(p),$$

а передаточная функция последовательно соединенных звеньев

$$\bar{W}_2(p) = \bar{W}_1(p)W_3(p).$$

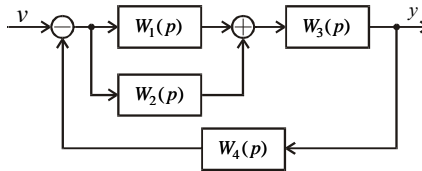


Рис. 3.33. Структурная схема системы

С учетом введенных обозначений структуру системы можно привести к виду, изображенному на рис. 3.34.

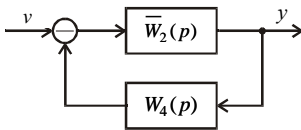


Рис. 3.34. Структурная схема эквивалентной системы

Используя структурные преобразования, запишем общую передаточную функцию системы

$$W(p) = \frac{\bar{W}_2(p)}{1 + \bar{W}_2(p)W_4(p)}.$$

Подставляя вместо  $\bar{W}_1(p)$  и  $\bar{W}_2(p)$  их значения, получим окончательно

$$W(p) = \frac{W_1(p) + W_2(p) W_3(p)}{1 + W_1(p) + W_2(p) W_3(p)W_4(p)}.$$

**ПРИМЕР 3.2**

Определить передаточную функцию системы автоматического сопровождения цели радиолокационной станции [22] (рис. 3.35). На рисунке  $W_{\Pi}(p)$  – передаточная функция приемника системы;  $W_{\Phi,д}(p)$  – передаточная функция фазового детектора;  $W_{у,М}(p)$  – передаточная функция усилителя мощности;  $W_{д}(p)$  – передаточная функция двигателя;  $W_{р}(p)$  – передаточная функция редуктора;  $W_{дат}(p)$  – передаточная функция датчика частоты вращения антенны;  $W_{к}(p)$  – передаточная функция корректирующего устройства.

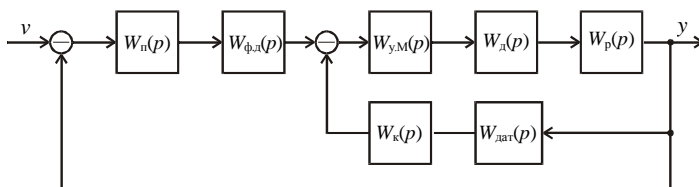


Рис. 3.35. Структурная схема системы автоматического сопровождения цели

Используя правила структурных преобразований, запишем передаточные функции соединений звеньев:

$$W_1(p) = W_{у,М}(p)W_{д}(p)W_{р}(p),$$

$$W_2(p) = W_{дат}(p)W_{к}(p),$$

$$W_3(p) = W_{\Pi}(p)W_{\Phi,д}(p).$$

Теперь определим передаточную функцию внутреннего контура

$$W_4(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$$

и прямого канала системы

$$W_5(p) = W_3(p)W_4(p).$$

Наконец, определим полную передаточную функцию системы

$$W(p) = \frac{y}{v} = \frac{W_5(p)}{1 + W_5(p)}.$$

Подставляя вместо промежуточных передаточных функций  $W_i(p)$ ,  $i = \overline{1,5}$  исходные значения, получим окончательно

$$W(p) = \frac{y}{v} = \frac{W_{\Pi}(p)W_{\Phi.Д}(p)W_{y.м}(p)W_{д}(p)W_{р}(p)}{1 + W_{y.м}(p)W_{д}(p)W_{р}(p)W_{дат}(p)W_{к}(p) + W_{\Pi}(p)W_{\Phi.Д}(p)}.$$

### 3.4. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Второй способ составления структурной схемы основан на использовании дифференциальных уравнений. Рассмотрим его сначала для объекта, поведение которого описывают векторно-матричные уравнения (2.1), (2.2):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m, \quad n \geq m. \end{cases} \quad (3.59)$$

Проинтегрируем уравнение состояния в (3.59) по времени и определим переменные состояния и выхода в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t (Ax + Bu) d\tau, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Уравнения (3.60) являются основными для составления схемы.

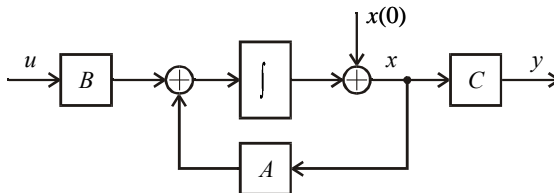


Рис. 3.36. Структурная схема, соответствующая уравнениям состояния объекта

Структурную схему, соответствующую уравнениям (3.60), удобнее изображать, начиная с выходных переменных  $y$ , причем входные и выходные переменные объекта желательно располагать на одной горизонтальной прямой (рис. 3.36).

Для одноканального объекта структурную схему можно составить по уравнению (2.3), разрешив его относительно старшей производной

$$y^{(n)} = -a_1 y - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu. \quad (3.61)$$

Проинтегрировав (3.61)  $n$  раз, получим

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(0) + \int_0^t y^{(n)}(t) dt, \\ \dots \\ \dot{y}(t) = \dot{y}(0) + \int_0^t \ddot{y}(t) dt, \\ y(t) = y(0) + \int_0^t -a_1 y - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu \, dt. \end{cases} \quad (3.62)$$

Системе уравнений (3.62) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 3.37.

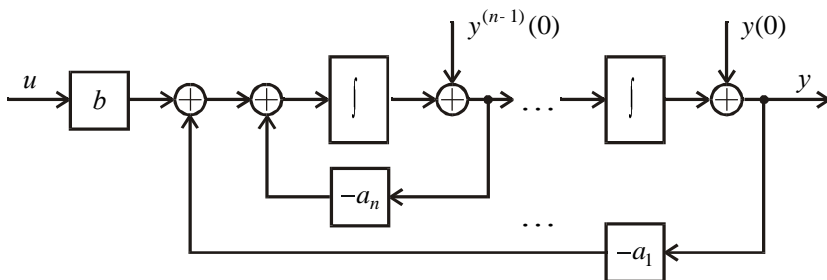


Рис. 3.37. Структурная схема, соответствующая уравнениям (3.61), (3.62)

Как видим, одноканальный объект управления, поведение которого описывает уравнение (3.61), структурно всегда можно представить в виде цепочки из  $n$  последовательно соединенных интеграторов с обратными связями.

**ПРИМЕР 3.3**

Изобразить структурную схему объекта, модель которого задана следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 + 2u, \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Предварительно проинтегрируем уравнения состояния

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (-x_1 + 2x_2) dt,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (-3x_1 - 5x_2 + 2u) dt,$$

$$y = x_1 + x_2.$$

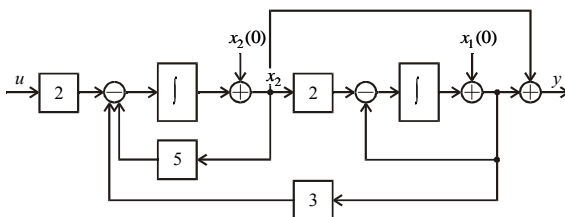


Рис. 3.38. Иллюстрация составления структурной схемы по уравнениям состояния

В соответствии с интегральными уравнениями на рис. 3.38 изобразим структурную схему системы.

### 3.5. ПЕРЕХОД ОТ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ

Обсудим наиболее известные способы преобразования математической модели объекта в виде произвольной передаточной функции к описанию в переменных состояния. Для этой цели используем соот-

ветствующие структурные схемы. Отметим, что данная задача неоднозначна, так как переменные состояния для объекта можно выбирать различным образом (см. разд. 2.2).

Рассмотрим два варианта перехода к описанию в переменных состояния от передаточной функции объекта

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1}, \quad (3.63)$$

где  $m < n$ . Предварительно представим (3.63) в виде произведения двух передаточных функций:

$$1) W(p) = \left( \frac{1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1} \right) (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0); \quad (3.64)$$

$$2) W(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) \left( \frac{1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1} \right). \quad (3.65)$$

Каждому из этих представлений (3.63) соответствует своя простая модель в переменных состояния, которая называется **канонической формой**.

### 3.5.1. ПЕРВАЯ КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА

Рассмотрим преобразование математической модели системы с передаточной функцией (3.64). Ее структурную схему можно представить в виде двух последовательно соединенных звеньев (рис. 3.39).

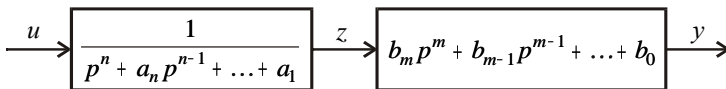


Рис. 3.39. Структурное представление системы (3.64)

Для каждого звена системы запишем соответствующее операторное уравнение

$$\begin{cases} (p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1)z = u, \\ (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0)z = y. \end{cases} \quad (3.66)$$

Определим из первого уравнения (3.66) старшую производную переменной  $z$ , что соответствует значению  $p^n z$  в операторной форме

$$p^n z = u - a_n p^{n-1} z - \dots - a_1 z.$$

Полученное выражение позволяет представить первое уравнение (3.66) в виде цепочки из  $n$  интеграторов с обратными связями, а выходная переменная  $y$  формируется в соответствии со вторым уравнением (3.66) как сумма переменной  $z$  и ее  $m$  производных (рис. 3.40).

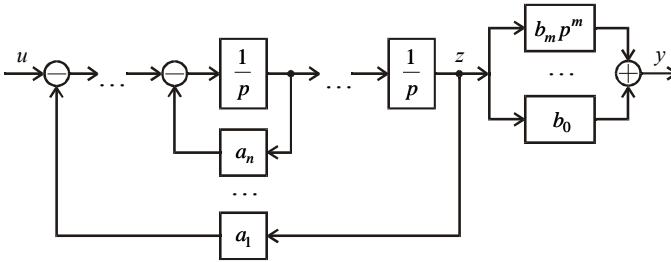


Рис. 3.40. Схема, соответствующая уравнениям (3.66)

Используя структурные преобразования, получим структурную схему системы, приведенную на рис. 3.41.

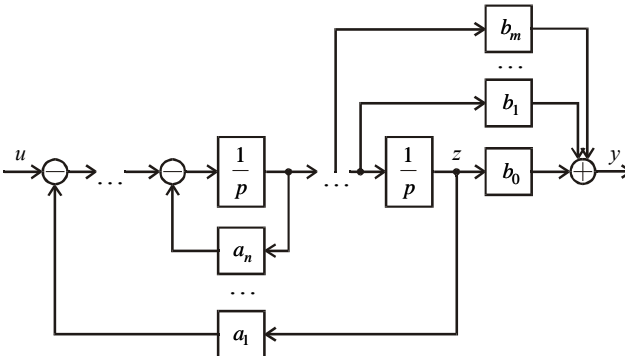


Рис. 3.41. Структурная схема, соответствующая канонической форме



Отметим, что структурная схема, соответствующая передаточной функции (3.64), состоит из цепочки  $n$  интеграторов, где  $n$  – порядок системы. Причем в обратной связи находятся коэффициенты знаменателя исходной передаточной функции (коэффициенты характеристического полинома), а в прямой связи – коэффициенты полинома ее числителя.

От полученной структурной схемы нетрудно перейти к модели системы в переменных состояния. С этой целью выход каждого интегратора примем за переменную состояния

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \dots, \quad x_n = z^{(n-1)},$$

что позволяет записать дифференциальные уравнения состояния и уравнение выхода системы (3.63) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + u, \\ y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1}. \end{cases} \quad (3.67)$$

Систему уравнений (3.67) можно представить в векторно-матричной форме (2.1) со следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0.$$

Модель системы в переменных состояния (3.67) будем называть *первой канонической формой*.

### 3.5.2. ВТОРАЯ КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА

Рассмотрим второй способ перехода от передаточной функции (3.63) к описанию в переменных состояния, для чего структуру системы (3.65) схематично представим на рис. 3.42. Ее операторные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} (p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1)y = z_1, \\ (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0)u = z_1. \end{cases} \quad (3.68)$$

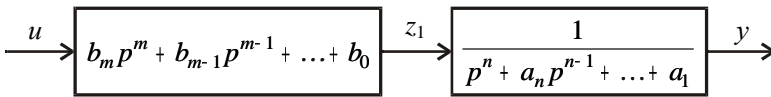


Рис. 3.42. Структурное представление передаточной функции (3.65)

Аналогично предыдущему случаю представим первое уравнение (3.68) в виде цепочки из  $n$  интеграторов с обратными связями, а входное воздействие  $z_1$  сформируем в соответствии со вторым уравнением (3.68) в виде суммы управления  $u$  и  $t$  его производных (рис. 3.43).

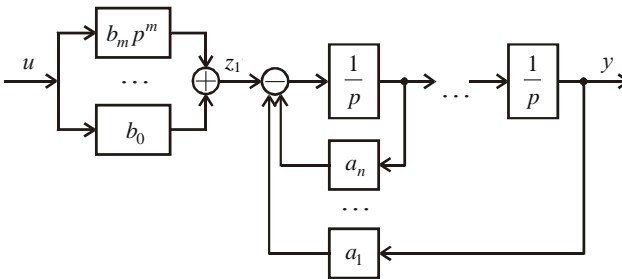


Рис. 3.43. Схема, соответствующая уравнениям (3.68)

В результате структурных преобразований получим структурную схему системы, приведенную на рис. 3.44. Как видим, и в этом случае структурная схема, соответствующая передаточной функции (3.65), состоит из цепочки  $n$  интеграторов. В обратной связи также располагаются коэффициенты характеристического полинома, а в прямой связи – коэффициенты полинома ее числителя.

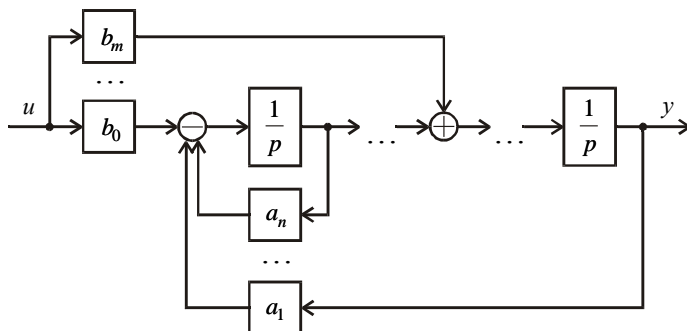


Рис. 3.44. Структурная схема, соответствующая передаточной функции (3.65)

Снова в качестве переменных состояния используем выходные величины интеграторов и запишем относительно их дифференциальные уравнения состояния и уравнение выхода

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + b_i u, \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + b_0 u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (3.69)$$

По уравнениям (3.69) определим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} B^T &= 0 \dots 0 \ b_m \dots b_0, \\ C &= 1 \ 0 \dots 0. \end{aligned}$$

Модель системы в переменных состояния типа (3.69) будем называть *второй канонической формой*.

Отметим, что матрица  $A$  неизменна для первой или второй канонических форм и содержит коэффициенты знаменателя исходной передаточной функции (3.63). Коэффициенты числителя передаточной функции (3.63) содержит матрица  $C$  (в случае первой канонической формы)

или матрица  $B$  (в случае второй канонической формы). Поэтому уравнения состояния, соответствующие двум каноническим представлениям системы, могут быть записаны непосредственно по передаточной функции (3.63) без перехода к структурным схемам, приведенным на рис. 3.40 и 3.43.

Как видим, переход от передаточной функции к описанию в переменных состояния является процедурой неоднозначной. Мы рассмотрели варианты перехода к каноническому описанию, которые чаще других используются в теории автоматического управления.

### ПРИМЕР 3.4

Получить два варианта канонического описания и соответствующих структурных схем для системы, модель которой имеет вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p^2 + 2p + 7}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}.$$

Используем представление передаточной функции в виде (3.64) и запишем для нее операторные уравнения

$$\begin{cases} (p^3 + 3p^2 + 4p + 1)z = u, \\ (5p^2 + 2p + 7)z = y, \end{cases}$$

от которых перейдем к структурной схеме, приведенной на рис. 3.45.

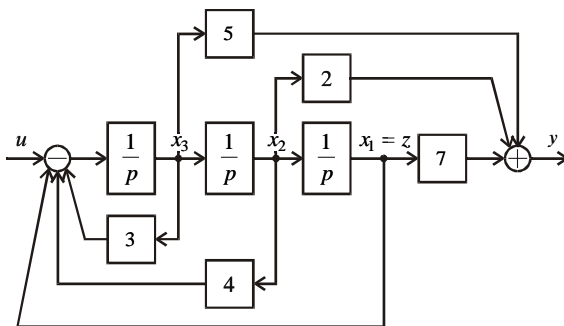


Рис. 3.45. Структурная схема, соответствующая первой канонической форме

На основании этой структурной схемы запишем уравнения первой канонической формы в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + u, \\ y = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Для перехода ко второй канонической форме представим передаточную функцию системы в виде (3.65) и запишем для нее следующие операторные уравнения:

$$\begin{cases} (p^3 + 3p^2 + 4p + 1)y = z, \\ (5p^2 + 2p + 7)u = z, \end{cases}$$

которым соответствует структурная схема, показанная на рис. 3.46.

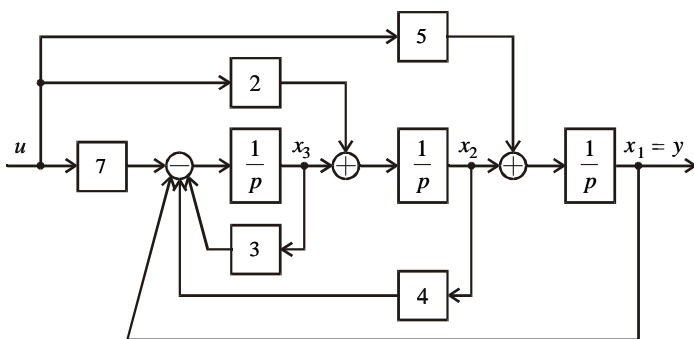


Рис. 3.46. Структурная схема, соответствующая второй канонической форме

Запишем теперь модель системы в виде второй канонической формы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 5u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 7u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

### 3.6. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ СТРУКТУРНОГО МЕТОДА

Структурный метод удобен при расчете линейных автоматических систем, но имеет свои ограничения. Метод предполагает использование передаточных функций, главным образом при нулевых начальных условиях.

При использовании структурного метода необходимо придерживаться следующего *правила*: при любом преобразовании системы ее порядок не должен уменьшаться, т. е. недопустимо сокращение одинаковых множителей в числителе и знаменателе передаточной функции.

Сокращая одинаковые множители, мы тем самым исключаем из модели системы реально существующие звенья. Тем не менее есть редкие ситуации, когда можно без ущерба для расчета сократить множители. На следующих примерах проиллюстрируем эти свойства.

#### ПРИМЕР 3.5

Рассмотрим систему, состоящую из интегрирующего и дифференцирующего звеньев, которые соединены последовательно.

Первый вариант соединения звеньев показан на рис. 3.47.

Используя структурные преобразования, найдем общую передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1}{p} p = 1.$$

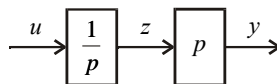


Рис. 3.47. Первый вариант соединения звеньев

Отсюда следует вывод, что подобное соединение звеньев эквивалентно безынерционному звену, т. е. сигнал на выходе системы повторяет сигнал на ее входе. Покажем это, рассматривая уравнения отдельных звеньев. Выходной сигнал интегрирующего звена определяется соотношением

$$z(t) = z(0) + \int_0^t u(t) dt,$$

где  $z(0)$  – начальное условие на интеграторе. Сигнал на выходе дифференцирующего звена, а следовательно, и всей системы имеет вид

$$y(t) = \dot{z}(t) = u(t),$$

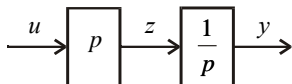


Рис. 3.48. Второй вариант соединения звеньев

что соответствует выводу, сделанному на основе анализа общей передаточной функции звеньев.

Второй вариант соединения звеньев показан на рис. 3.48, т. е. звенья поменяли местами. Передаточная функция системы та же, что и в первом случае,

$$W(p) = p \frac{1}{p} = 1.$$

Однако теперь выход системы не повторяет входной сигнал. В этом можно убедиться, рассматривая уравнения звеньев. Сигнал на выходе дифференцирующего звена соответствует уравнению

$$z(t) = \dot{u}(t),$$

а на выходе системы определяется соотношением

$$y(t) = y(0) + \int_0^t z(\tau) d\tau = y(0) + u(t).$$

Как видим, во втором случае выходной сигнал отличается от сигнала на выходе первой системы на величину начального значения, несмотря на то, что обе системы имеют одну и ту же передаточную функцию.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе рассмотрены динамические характеристики типовых звеньев, из которых состоят системы управления произвольной конфигурации. Обсуждены особенности структурных схем, построенных на основе передаточных функций и дифференциальных уравнений. Приведены два способа перехода от передаточной функции системы через структурные схемы к ее моделям в виде переменных состояния, соответствующим различным каноническим формам.

Следует отметить, что представление системы в виде структурной схемы дает, по существу, структурный портрет системы и позволяет в ряде случаев приближенно оценить ее статику и динамику еще до расчетов.

## ЗАДАЧИ

**3.1.** Изобразить структурную схему системы, дифференциальное уравнение которой имеет вид:

а)  $2\ddot{y} + 0,5\dot{y} + y = 6u;$

б)  $\ddot{y} + 0,2\dot{y} + 0,3y = 5u;$

в)  $0,5\ddot{y} - 3\dot{y} + 6y = 7u.$

**3.2.** Изобразить структурную схему системы, модель которой представлена в переменных состояния:

а) 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 7x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2 - x_3; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 0,5x_2 - 0,2x_3 + 3u, \\ y = x_1; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 - 3u, \\ y = x_1 + x_2; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

**3.3.** Определить передаточные функции систем, если их структурные схемы имеют вид, показанный на рис. 3.49.

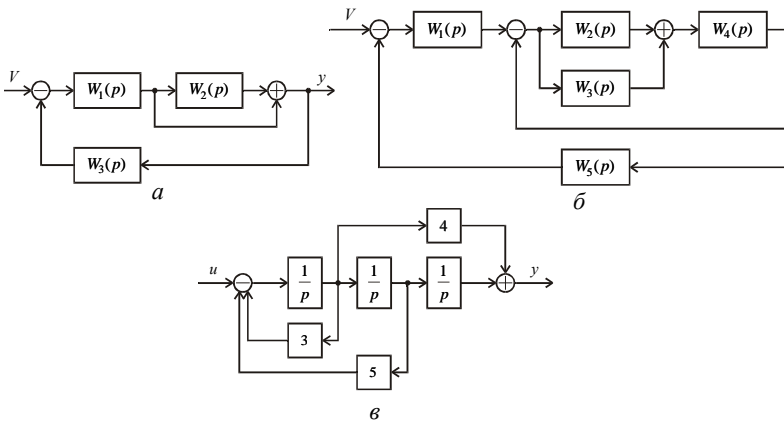


Рис. 3.49. Структурные схемы к задаче 3.3



**3.4.** Известны структурные схемы системы (рис. 3.50). Записать их модели в переменных состояниях.

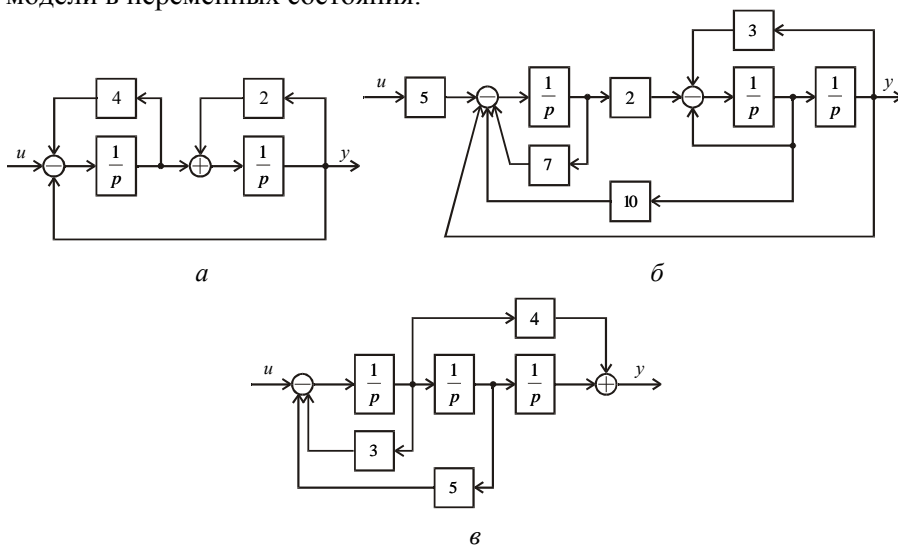


Рис. 3.50. Структурные схемы к задаче 3.4

**3.5.** Известна структурная схема системы (рис. 3.51).

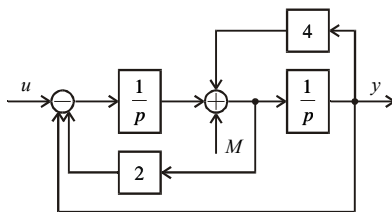


Рис. 3.51. Структурная схема к задаче 3.5

1. Определить передаточную функцию  $W_u(p) = \frac{y(p)}{u(p)}$  в предположении, что  $M = 0$ .
2. Определить передаточную функцию  $W_M(p) = \frac{y(p)}{M(p)}$ , полагая  $u = 0$ .
3. Записать модель системы в переменных состояниях.

4. Повторить пп. 1 и 2 для системы, структурная схема которой показана на рис. 3.52.

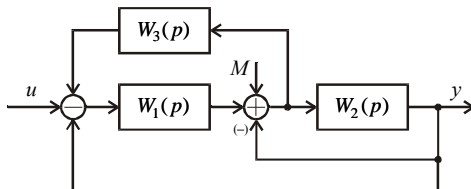


Рис. 3.52. Структурная схема к задаче 3.5

**3.6.** Изобразить структурную схему, соответствующую первой канонической форме описания системы, имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{6p + 3}{5p^2 + 8p + 2}.$$

1. Записать первую каноническую форму.
2. Изобразить структурную схему, соответствующую второй канонической форме описания системы.
3. Записать вторую каноническую форму.

**3.7.** Изобразить структурную схему, соответствующую первой канонической форме описания системы, имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{4p + 5}{p^3 + p^2 + 3p + 2}.$$

1. Записать первую каноническую форму.
2. Изобразить структурную схему, соответствующую второй канонической форме описания системы.
3. Записать вторую каноническую форму.

**3.8.** Изобразить структурную схему, соответствующую первой канонической форме описания системы, имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{10p^2 + 3p + 1}{0,5p^3 + 0,4p^2 + p + 2}.$$

1. Записать первую каноническую форму.
2. Изобразить структурную схему, соответствующую второй канонической форме описания системы.
3. Записать вторую каноническую форму.

---

---

# Глава 4

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

### 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе мы начинаем исследование свойств процессов, происходящих в системах автоматики. Важнейшим из них является устойчивость – основное качественное свойство системы автоматического управления, без которого она неработоспособна.

Физически устойчивость означает, что при ограниченном входном воздействии выходной сигнал также является ограниченным и процессы в системе стремятся к определенным значениям при любых начальных условиях.

Качественный вид переходных характеристик устойчивой и неустойчивой систем изображен на рис. 4.1. Очевидно, что для переходной характеристики устойчивой системы справедливо условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k.$$

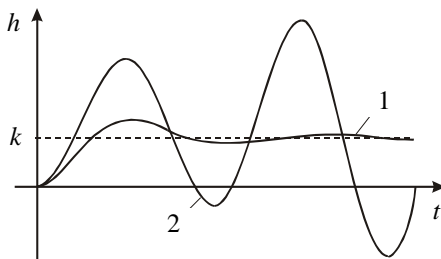


Рис. 4.1. Переходные характеристики системы:  
1 – сходящийся процесс, система устойчива;  
2 – расходящийся процесс, система неустойчива

Об устойчивости можно судить также по импульсным переходным функциям (рис. 4.2), которые в случае устойчивой системы удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

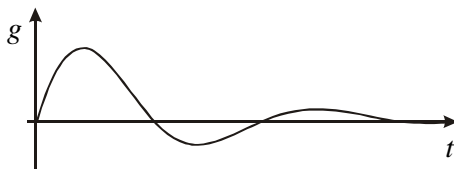


Рис. 4.2. Импульсная переходная функция устойчивой системы

Рассмотрим, как можно оценить это свойство для систем, поведение которых описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m, \quad n \geq m. \end{cases} \quad (4.1)$$

Определим зависимость переменных состояния от времени как решение векторно-матричного уравнения состояния (4.1) в виде

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (4.2)$$

Здесь первое слагаемое соответствует свободной составляющей движения (из произвольных начальных условий), второе – *вынужденной* (движение под действием управления).

Одним из основных режимов работы системы управления является **равновесный (статический) режим**, при котором переменные состояния с течением времени не меняются, а все производные координат состояния равны нулю.

Покажем, что процесс движения к равновесию можно считать свободным, т. е. он соответствует первому слагаемому в выражении (4.2).

Предварительно запишем уравнение статики, полагая в (4.1)  $\dot{x} = 0$ ,  $u = \text{const}$ ,

$$0 = Ax^0 + Bu, \quad (4.3)$$

откуда при  $\det A \neq 0$  определим равновесное значение переменных состояния

$$x^0 = -A^{-1}Bu. \quad (4.4)$$

Введем новые координаты, равные отклонениям от точки равновесия,

$$\Delta = x - x^0 \quad (4.5)$$

и запишем для них дифференциальное уравнение

$$\dot{\Delta} = \dot{x} - \dot{x}^0 = \dot{x}, \quad (4.6)$$

так как  $\dot{x}^0 = 0$ .

После подстановки в (4.6) вместо  $\dot{x}$  его значения из (4.1) с учетом (4.5) получим

$$\dot{\Delta} = A(\Delta + x^0) + Bu.$$

Учитывая (4.4), уравнение в отклонениях принимает вид

$$\dot{\Delta} = A\Delta. \quad (4.7)$$

Как видим, уравнение (4.7) не содержит  $u$ , и поэтому переходный процесс по  $\Delta$  порождается только ненулевыми начальными условиями согласно уравнению

$$\Delta(t) = e^{At} \Delta(0). \quad (4.8)$$

**Линейная система** (4.1) называется **устойчивой**, если для ее процессов выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0. \quad (4.9)$$

Оно представляет собой предел выражения (4.8), которое соответствует первой составляющей решения (4.2). Таким образом, устойчивость линейной системы (4.1) определяется только ее структурой и

параметрами и не зависит от величины внешних воздействий и начальных условий. Причем для анализа устойчивости можно не переходить к уравнениям в отклонениях от состояния равновесия, а исследовать свойства матрицы  $A$ .

## 4.2. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 4.2.1. ОБЩЕЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*Для устойчивости линейной системы (4.1) необходимо и достаточно, чтобы вещественная часть всех собственных значений матрицы  $A$  (корней характеристического уравнения) была отрицательной, т. е.*

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.10)$$

Покажем справедливость этого утверждения, для чего запишем характеристическое уравнение системы (4.1)

$$A(p) = \det(pI - A) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1 = 0 \quad (4.11)$$

и найдем его корни  $\lambda_i, \quad i = \overline{1, n}$ . Используя модальное представление, определим полный процесс в системе, который представляет собой сумму экспонент

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} x_i(0). \quad (4.12)$$

Как видим, качественный характер переходных процессов полностью определяется значениями корней  $\lambda_i$ .

В случае, когда все они вещественные и отрицательные, каждая компонента выражения (4.12) при выполнении условия (4.10) носит затухающий характер (рис. 4.3). Следовательно, и их сумма также будет иметь затухающий характер, т. е. будет с течением времени стремиться к нулю.

Если корни характеристического уравнения (4.11) комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью, то каждая пара их дает колебательную составляющую процесса, которая мажорируется затухающей экспонентой (рис. 4.4).

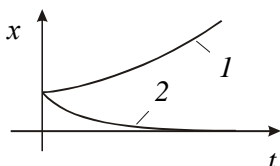


Рис. 4.3. Иллюстрация процесса в системе с вещественным корнем:

1 – расходящийся; 2 – затухающий

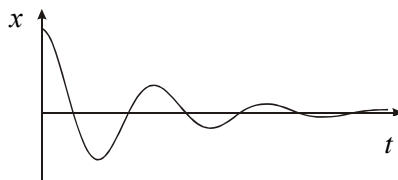


Рис. 4.4. Колебательная составляющая процесса в случае отрицательной вещественной части пары комплексно-сопряженных корней

Следовательно, и в этом случае процесс, определяемый соотношением (4.12), будет иметь затухающий характер.

Таким образом, мы показали достаточность условия устойчивости (4.10).

Покажем теперь необходимость этого условия. Предположим, что хотя бы один из корней  $\lambda_i$  имеет положительную вещественную часть. Соответствующая ему составляющая решения будет с течением времени возрастать и в пределе стремиться к бесконечности (рис. 4.5). Следовательно, полный процесс, который определяется выражением (4.12), будет иметь расходящийся характер, а система (4.1) никогда не сможет стать устойчивой.

Изобразим корневой портрет системы (рис. 4.6) и получим графическую интерпретацию условия (4.10): для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения располагались в левой полуплоскости плоскости корней.

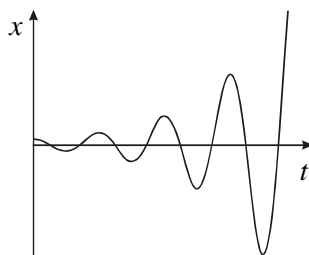


Рис. 4.5. Процесс в системе с положительной вещественной частью пары комплексно-сопряженных корней

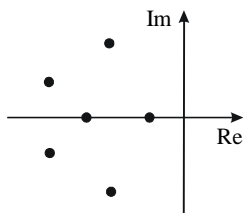


Рис. 4.6. Иллюстрация корневого портрета устойчивой системы

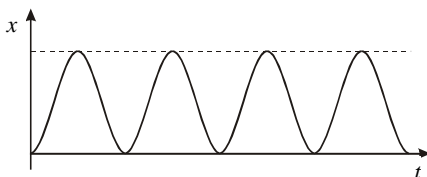


Рис. 4.7. Процесс в системе с «мнимыми» корнями

Если хотя бы один корень находится в правой полуплоскости плоскости корней, то система будет неустойчива. Мнимая ось представляет собой **границу устойчивости системы**: при расположении комплексно-сопряженных корней на этой оси система находится на границе устойчивости (при условии, что все остальные корни имеют отрицательную вещественную часть). При этом процессы имеют вид незатухающих колебаний (рис. 4.7).

#### 4.2.2. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Таким условием является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (4.11). В этом можно убедиться, если при известных корнях  $\lambda_i$  представить характеристический полином  $A(p)$  в виде произведения

$$A(p) = (p - \lambda_1) \dots (p - \lambda_n).$$

В случае, когда все корни  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , вещественные  $\lambda_i = -\alpha_i$ ,  $\alpha_i > 0$  характеристическое уравнение принимает вид

$$A(p) = (p + \alpha_1) \dots (p + \alpha_n) = 0.$$

Раскрывая скобки, получим уравнение типа (4.11), где все коэффициенты  $\alpha_i$  будут положительными. Нетрудно убедиться в том, что аналогичный результат получится, если корни  $\lambda_i$  комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.



Таким образом, коэффициенты характеристического уравнения (4.11) устойчивой системы всегда будут положительны. При наличии хотя бы одного отрицательного коэффициента система будет неустойчива, дополнительных исследований не требуется.

В то же время следует помнить, что положительность всех коэффициентов характеристического уравнения еще не гарантирует устойчивости системы, необходима ее дополнительная проверка.

**ПРИМЕР 4.1**

Проверить устойчивость системы первого порядка, передаточная функция которой имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Ее характеристическое уравнение следующее:

$$Tp + 1 = 0.$$

Оно имеет только один корень  $\lambda = -1/T$ , который при  $T > 0$  будет вещественным отрицательным.

Следовательно, положительность коэффициентов характеристического уравнения для системы первого порядка является необходимым и достаточным условием устойчивости.

**ПРИМЕР 4.2**

Проверить устойчивость следующей системы второго порядка:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}.$$

Запишем ее характеристическое уравнение

$$T^2 p^2 + 2dTp + 1 = 0$$

и найдем корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d}{T} \pm \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{T}.$$

Они будут иметь отрицательную вещественную часть, если одновременно выполняются условия

$$T > 0, d > 0.$$

Таким образом, положительность коэффициентов характеристического уравнения для системы второго порядка также является необходимым и достаточным условием устойчивости.

### 4.3. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Применять для анализа устойчивости необходимое и достаточное условие удобно только в случае систем невысокого порядка, полюса которых можно вычислить аналитически. Для проверки устойчивости систем произвольного порядка были разработаны так называемые *критерии устойчивости*, которые позволяют по характеристическому уравнению или частотной характеристике определить, содержит ли передаточная функция полюса, находящиеся на мнимой оси или в правой половине комплексной плоскости.

#### 4.3.1. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

Этот критерий сформулирован математиком А. Гурвицем в 1895 г., он является алгебраическим и связывает расположение корней характеристического уравнения с определенными условиями, которые накладываются на его коэффициенты.

Рассмотрим критерий Гурвица без доказательства.

Предварительно из коэффициентов характеристического уравнения (4.11)

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1 = 0$$

по следующему *правилу* составляется **матрица Гурвица**: на главной диагонали сверху вниз выписываются по порядку коэффициенты характеристического уравнения от  $a_n$  до  $a_1$  включительно. В каждом столбце вниз от диагонали записывают коэффициенты при возрастающих степенях оператора  $p$ , вверх – при убывающих степенях  $p$ . Недостающие элементы в столбце дополняются нулями.

В результате получим квадратную матрицу вида

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

где  $\dim H = n \times n$ .

**Формулировка критерия.** Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все  $n$  диагональных миноров, полученных из матрицы Гурвица  $H$ , были положительны:

$$\Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.14)$$

Здесь  $\Delta_i$  – определители Гурвица, которые составляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_n, \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}, \\ \Delta_3 &= \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}, \\ &\dots \\ \Delta_n &= \det H = a_1 \Delta_{n-1}. \end{aligned}$$

Поскольку определитель  $n-1$ -го порядка должен быть положительным, последнее условие соответствует требованию  $a_1 > 0$ .

Следствием критерия является **условие границы устойчивости**, когда последний определитель Гурвица обращается в нуль:

$$\begin{cases} \Delta_n = \det H = a_1 \Delta_{n-1} = 0, \\ \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, (n-1)}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Это условие распадается на два. Одно из них

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, (n-1)}, \end{cases}$$

соответствует полюсу, равному нулю. Второй случай условия (4.15) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta_{n-1} = 0, \\ \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, (n-1)}. \end{cases}$$

При этом характеристическое уравнение системы содержит два комплексно-сопряженных корня, расположенных на мнимой оси плоскости корней.

На практике критерий Гурвица обычно применяют для проверки устойчивости систем невысокого порядка, так как при высоком порядке условия устойчивости (4.14) становятся очень громоздкими.

#### ПРИМЕР 4.3

Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость системы третьего порядка, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\ddot{y} + a_3\dot{y} + a_2y + a_1y = bu.$$

Запишем ее характеристическое уравнение

$$p^3 + a_3p^2 + a_2p + a_1 = 0$$

и составим из коэффициентов матрицу Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Получим следующие условия устойчивости системы:

- 1)  $\Delta_1 = a_3 > 0$ ;
- 2)  $\Delta_2 = a_3a_2 > a_1$ ;
- 3)  $\Delta_3 = \det H = a_1\Delta_2 > 0$  или  $a_1 > 0$ .

Так как положительность всех коэффициентов характеристического уравнения следует из необходимого условия, то условие устойчивости системы третьего порядка принимает вид

$$a_3 a_2 > a_1.$$

Данное соотношение можно рассматривать как частный случай критерия Гурвица, т. е. оно является необходимым и достаточным условием устойчивости для систем третьего порядка.

#### ПРИМЕР 4.4

Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, полагая в качестве выходной переменной угол поворота двигателя  $\alpha$ , который связан с угловой скоростью вращения соотношением

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Добавим к основным уравнениям двигателя, приведенным в примере 2.4, выражение для угловой скорости вращения и получим модель объекта

$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} + RI + c_1 \omega = U_{\text{я}}, \\ J \frac{d\omega}{dt} = c_2 I - M_{\text{с}}, \\ \omega = \frac{d\alpha}{dt}. \end{cases}$$

Запишем ее в виде одного дифференциального уравнения относительно переменной  $\alpha$ :

$$T_{\text{я}} T_{\text{м}} \ddot{\alpha} + T_{\text{м}} \dot{\alpha} + \dot{\alpha} = ku - k_{\text{м}} (T_{\text{я}} p + 1) M,$$

все параметры которого приведены в примере 2.4. Определим передаточную функцию двигателя по управлению, полагая  $M = 0$ ,

$$W(p) = \frac{\alpha}{u} = \frac{k}{T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^3 + T_{\text{м}} p^2 + p}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$T_{\text{я}} T_{\text{м}} p^3 + T_{\text{м}} p^2 + p = 0.$$

Предварительно запишем это уравнение в стандартной форме

$$p^3 + \frac{1}{T_{\text{я}}} p^2 + \frac{1}{T_{\text{я}} T_{\text{М}}} p = 0$$

и составим матрицу Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{\text{я}}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{T_{\text{я}} T_{\text{М}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видим,  $\det H = 0$ . Следовательно, двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, выходной переменной которого является угол поворота, находится на границе устойчивости.

### 4.3.2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Критерий сформулирован А.В. Михайловым в 1938 г., он базируется на принципе аргумента теории функций комплексной переменной.

Для анализа устойчивости системы предлагается исследовать характеристический комплекс  $F(j\omega)$ , который получается из характеристического полинома

$$F(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1 \quad (4.16)$$

заменой  $p$  на  $j\omega$ :

$$F(j\omega) = (j\omega)^n + a_n (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1. \quad (4.17)$$

Выделим в (4.17) вещественную и мнимую части, а также модуль и фазу:

$$F(j\omega) = R_F(\omega) + jI_F(\omega) = A_F(\omega) e^{j\varphi_F(\omega)}. \quad (4.18)$$

При конкретном численном значении частоты ( $\omega = \omega_1$ ) характеристический комплекс (4.18) представляет собой комплексное число

$F(j\omega_1)$ , которое можно изобразить на плоскости в виде вектора, соединяющего начало координат с точкой  $R_F(\omega_1); jI_F(\omega_1)$ .

При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  конец вектора  $F(j\omega)$  выписывает на комплексной плоскости некоторую кривую, которую называют **годографом Михайлова** (рис. 4.8). Причем начинается годограф, как следует из соотношения (4.17), в точке с координатами  $a_1; j0$ .

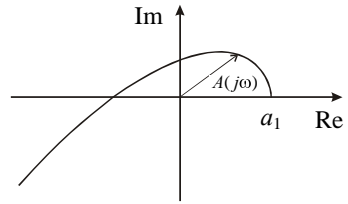


Рис. 4.8. Пример годографа Михайлова

**Формулировка критерия.** Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  начинался на вещественной оси в точке  $a_1$  и проходил последовательно против часовой стрелки  $n$  квадрантов комплексной плоскости, не обращаясь в нуль и стремясь к  $\infty$  в  $n$ -м квадранте.

Чтобы доказать критерий, проанализируем, как связаны корни характеристического уравнения  $\lambda_i$  с видом годографа Михайлова. Поскольку полином (4.16) можно представить в виде произведения простых сомножителей

$$F(p) = (p - \lambda_1) \cdots (p - \lambda_n), \quad (4.19)$$

характеристический комплекс (4.17) также принимает вид

$$F(j\omega) = (j\omega - \lambda_1) \cdots (j\omega - \lambda_n). \quad (4.20)$$

Его можно представить в форме

$$F(j\omega) = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \cdots A_n(\omega)e^{j\varphi_n(\omega)}. \quad (4.21)$$

Из выражений (4.18) и (4.21) следует, что

$$A_F(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega), \quad (4.22)$$

$$\varphi_F(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (4.23)$$

Если характеристическое уравнение системы содержит комплексно-сопряженные корни с нулевой вещественной частью, то при определенном значении частоты  $\omega = \omega_0$  один из сомножителей в (4.20) обратится в нуль. Следовательно,  $A_F(\omega) = 0$  и  $F(j\omega) = 0$ . В случае устойчивой системы корни расположены только в левой полуплоскости плоскости корней и не могут быть «мнимыми», значит, в нуль годограф Михайлова не обращается.

Определим теперь угол поворота вектора  $F(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Предварительно рассмотрим отдельные сомножители выражения (4.20) и угол поворота соответствующего вектора. При этом выделим несколько вариантов корней.

1. Корень характеристического уравнения вещественный и отрицательный, т. е.  $\lambda_i = -\alpha_i$ ,  $\alpha_i > 0$ . Соответствующий сомножитель в (4.20) имеет вид  $F_i j\omega = j\omega + \alpha_i$ . Изобразим этот элементарный вектор на комплексной плоскости; при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  вещественная часть  $F_i j\omega$  остается неизменной и равной  $\alpha_i$ , а мнимая часть возрастает до бесконечности (рис. 4.9).

Следовательно, устойчивому вещественному корню соответствует угол поворота элементарного вектора  $\varphi_i = +\pi/2$ .

Аналогично можно определить угол поворота элементарного вектора  $F_i(j\omega) = j\omega - \alpha_i$  для случая вещественного положительного корня характеристического уравнения  $\lambda_i = +\alpha_i$ . Он будет равен  $\varphi_i = -\pi/2$ .

2. Рассмотрим теперь пару устойчивых комплексно-сопряженных корней  $\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$  и соответствующий им угол поворота произведения  $-\alpha_i + j\beta_i + j\omega$   $-\alpha_i - j\beta_i + j\omega$ .

У этих двух векторов начальные фазы одинаковы по модулю ( $\varphi_0$ ), но имеют противоположные знаки. При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  один вектор поворачивается на угол  $\varphi_i = \varphi_0 + \pi/2$ , а второй — на угол  $\varphi_{i+1} = -\varphi_0 + \pi/2$ .

Суммарный угол поворота для пары устойчивых комплексно-сопряженных корней равен  $+\pi$  (рис. 4.10).

Если комплексно-сопряженные корни имеют положительную вещественную часть, то суммарный угол поворота равен  $-\pi$ .



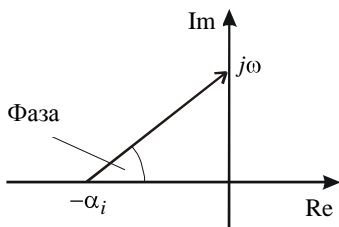


Рис. 4.9. Элементарный вектор, соответствующий устойчивому вещественному корню

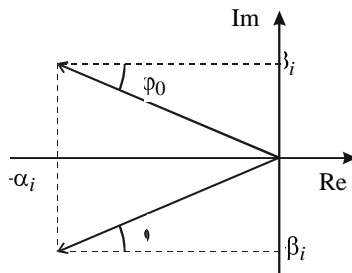


Рис. 4.10. Векторы, соответствующие устойчивым комплексно-сопряженным корням

Таким образом, в устойчивой системе каждый из  $n$  корней при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  даст приращение фазы  $\varphi_i = +\pi/2$ , а общий угол поворота  $F j\omega$  согласно (4.23) равен  $+\pi/2 n$ , что и требовалось доказать.

Пример годографов Михайлова для устойчивых и неустойчивых систем третьего порядка приведен на рис. 4.11.

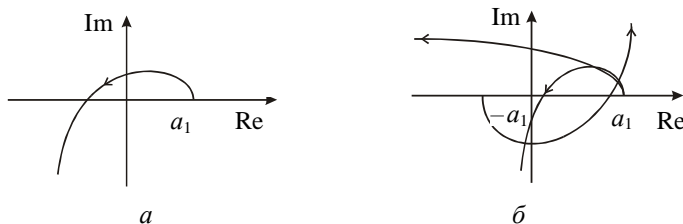


Рис. 4.11. Годографы Михайлова для устойчивой (а) и неустойчивой (б) систем ( $n = 3$ )

Условием **границы устойчивости** является обращение в нуль годографа Михайлова при некотором значении частоты  $\omega = \omega_0$ . Аналитически это условие можно записать в виде

$$\begin{cases} R_F(\omega_0) = 0, \\ I_F(\omega_0) = 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

Здесь  $\omega_0$  – частота незатухающих колебаний, возникающих в системе, которая находится на границе устойчивости.

**ПРИМЕР 4.5**

Проверить устойчивость системы (рис. 4.12). Здесь

$$W_0(p) = \frac{2}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}.$$

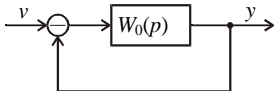


Рис. 4.12. Структурная схема исследуемой системы

Определим передаточную функцию замкнутой системы

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2}{p^3 + 2p^2 + 2p + 3}$$

и запишем ее характеристический полином

$$F(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 3.$$

Перейдем к выражению для годографа Михайлова

$$F(j\omega) = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 3$$

и представим его в форме

$$F(j\omega) = R_F(\omega) + jI_F(\omega) = (3 - 2\omega^2) + j(2\omega - \omega^3).$$

Для построения годографа Михайлова вычислим значения вещественной и мнимой частей при конкретных значениях частоты и занесем их в таблицу.

$\omega$	0	1	1,22	1,41	...	$\infty$
$R_F(\omega)$	3	1	0	-1	...	$-\infty$
$I_F(\omega)$	0	1	0,61	0	...	$-\infty$

По данным таблицы построим годограф Михайлова.

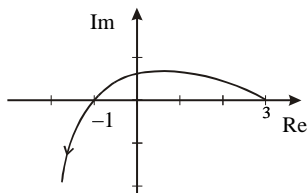


Рис. 4.13. Годограф Михайлова для примера 4.5

Как видим из рис. 4.13, он проходит последовательно три квадранта, не обращаясь в нуль и стремясь к бесконечности в третьем квадранте. Следовательно, система устойчива.

**ПРИМЕР 4.6**

Проверить устойчивость системы (рис. 4.14). Данная система представляет собой упрощенную модель одного из сочленений руки робота-манипулятора [43]. Исполнительным механизмом является двигатель постоянного тока (см. пример 2.4), а соединение с рукой осуществляется через редуктор. На рис. 4.14 обозначено:

$U_{я}$  – напряжение, подаваемое на якорь двигателя;

$\omega$  – угловая скорость вращения двигателя;

$\theta_1$  – угол поворота вала двигателя;

$\theta_2$  – угол поворота руки. При отсутствии возмущений взаимосвязь между скоростью вращения двигателя  $\omega$  и входным напряжением  $U_{я}$  определяет передаточная функция (см. пример 2.8)

$$W_{дв}(p) = \frac{k}{T_{я}T_{М}p^2 + T_{М}p + 1},$$

а угол поворота вала двигателя  $\theta_1$  связан с его угловой скоростью вращения зависимостью  $\omega = \dot{\theta}_1$ . Ей соответствует на схеме вторая передаточная функция  $1/p$ . Редуктор представляет собой безынерционное звено с передаточной функцией  $W_p(p) = \frac{1}{r}$ , где  $r$  – передаточное отношение редуктора.

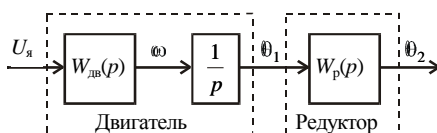


Рис. 4.14. Структурная схема руки робота

Проверим устойчивость системы при следующих значениях параметров передаточных функций:  $W_{дв}(p) = \frac{0,6}{0,13p^2 + 1,43p + 1}$ ,  $W_p(p) = \frac{1}{30}$ . Определим общую передаточную функцию сочленения руки робота

$$W(p) = \frac{k/r}{T_{я}T_{М}p^2 + T_{М}p + 1} \frac{1}{p} = \frac{0,02}{0,13p^2 + 1,43p + 1} \frac{1}{p}$$

и запишем характеристический полином

$$F(p) = 0,13p^2 + 1,43p + 1 \quad p.$$

Выражение для годографа Михайлова

$$F(j\omega) = -j \cdot 0,13\omega^3 - 1,43\omega^2 + j\omega$$

представим в форме

$$F(j\omega) = -1,43\omega^2 + j\omega - 0,13\omega^3.$$

Поскольку при  $\omega = 0$  вещественная и мнимая части  $F(j\omega)$  одновременно обращаются в нуль, годограф Михайлова начинается в начале координат. Это означает, что система находится на границе устойчивости.

### 4.3.3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

На практике более широкое применение по сравнению с критерием Михайлова получил критерий Н. Найквиста, который был разработан в 1932 г. для проверки устойчивости усилителей с отрицательной обратной связью, а затем обобщен на системы автоматического управления. Возможно, именно этот результат послужил толчком к бурному развитию частотного метода в теории автоматического управления.

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость системы с отрицательной обратной связью (так называемой **замкнутой системы**) по экспериментально снятой или полученной на основе передаточной функции амплитудно-фазовой частотной характеристики **разомкнутой системы**.

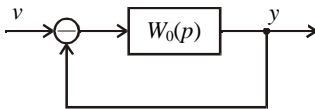


Рис. 4.15. Структурная схема замкнутой системы

Рассмотрим этот критерий для системы с единичной обратной связью (рис. 4.15). Здесь  $W_0(p)$  – передаточная функция устойчивой разомкнутой системы, которая в общем случае имеет вид

$$W_0(p) = \frac{B_0(p)}{A_0(p)}$$

где  $A_0(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1$  – ее характеристический полином.

Определим передаточную функцию системы, изображенной на рис. 4.15:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)} = \frac{B_0(p)}{A_0(p) + B_0(p)}, \quad (4.26)$$

где  $A(p) = A_0(p) + B_0(p)$  – характеристический полином замкнутой системы.

Предварительно введем вспомогательную передаточную функцию

$$\tilde{W}(p) = 1 + W_0(p) = \frac{A_0(p) + B_0(p)}{A_0(p)} = \frac{A(p)}{A_0(p)}. \quad (4.27)$$

Как видим, ее числитель представляет собой характеристический полином замкнутой системы, а знаменатель – характеристический полином разомкнутой системы. Так как  $\deg B_0(p) \leq \deg A_0(p)$ , в выражении для  $A(p)$  порядок суммы полиномов равен  $\deg A_0(p) = n$ . Следовательно, во вспомогательной передаточной функции  $\tilde{W}(p)$  полиномы числителя и знаменателя имеют одинаковый порядок, равный  $n$ .

Получим выражение для вспомогательной частотной характеристики на основе выражения (4.27):

$$\tilde{W}(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{A_0(j\omega)}. \quad (4.28)$$

Рассмотрим теперь результирующий угол поворота вектора  $\tilde{W}(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , используя те же соотношения, что и при доказательстве критерия Михайлова. Если замкнутая система устойчивая, то общее приращение фазы числителя (4.28) будет

$$\varphi(\omega) = n(\pi/2). \quad (4.29)$$

При устойчивой разомкнутой системе фаза знаменателя определяется соотношением

$$\varphi_0(\omega) = n(\pi/2). \quad (4.30)$$

Результирующий угол поворота вектора  $\tilde{W}(j\omega)$  будет равен разности фаз (4.29) и (4.30), т. е.

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \varphi(\omega) - \varphi_0(\omega) = 0. \quad (4.31)$$

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы при устойчивой разомкнутой должно выполняться соотношение (4.31). Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию: вспомогательная частотная характеристика не должна охватывать начало координат комплексной плоскости. Так как  $\tilde{W}(j\omega)$  отличается от  $W_0(j\omega)$  на единицу, можно строить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, что значительно проще.

**Формулировка критерия Найквиста:** для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой системы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не охватывала точку с координатами  $-1; j0$ .

Примеры расположения частотных характеристик, соответствующих устойчивой и неустойчивой замкнутым системам, приведены на рис. 4.16.

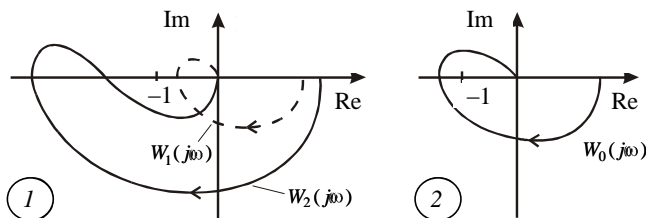


Рис. 4.16. Иллюстрация критерия Найквиста:

1 – устойчивые, 2 – неустойчивая замкнутые системы

Разомкнутая система может быть неустойчива, однако это не означает, что неустойчивой будет и замкнутая система. В этой ситуации следует использовать *видоизмененную формулировку критерия Найквиста*: замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика неустойчивой разомкнутой системы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  охватывает точку с координатами  $-1; j0$  в положительном направлении  $r/2$  раз, где  $r$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью [6].

Критерий Найквиста можно также применять, если разомкнутая система имеет в своем составе интегратор, т. е. находится на границе устойчивости. В этом случае ее передаточную функцию можно записать в виде

$$W_0(p) = \frac{B_0(p)}{pA_0(p)}, \quad (4.32)$$

где  $A_0(p)$  – характеристический полином устойчивой системы.

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы  $W_0(j\omega)$  будет иметь неопределенность при  $\omega = 0$ : при этом амплитуда  $A(0) \rightarrow \infty$ , а фаза скачком изменяется на  $180^\circ$ . Для получения определенности характеристику при построении условно дополняют полуокружностью бесконечно большого радиуса так, чтобы она началась на положительной вещественной полуоси (рис. 4.17). Такое дополнение характеристики разомкнутой системы позволяет использовать исходную формулировку критерия Найквиста.

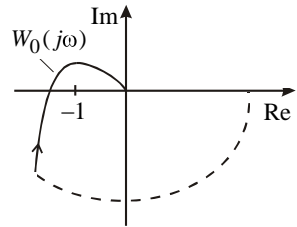


Рис. 4.17. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы с интегратором

Сформулируем теперь *условие границы устойчивости*. Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если при некоторой частоте  $\omega = \omega_0$  амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами  $-1; j0$ .

Аналитически это условие можно записать в виде

$$1 + W_0(j\omega_0) = 0. \quad (4.33)$$

Пример расположения для этой ситуации амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы на комплексной плоскости представлен на рис. 4.18.

Отметим в заключение, что критерий Найквиста можно применять и в общем случае, когда система содержит неединичную отрицательную обратную связь (рис. 4.19).

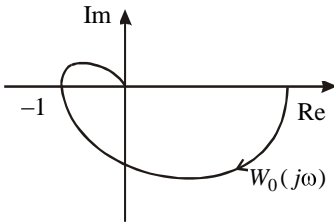


Рис. 4.18. Иллюстрация границы устойчивости

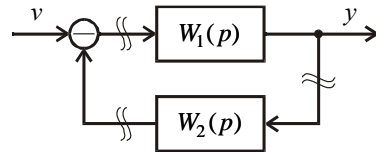


Рис. 4.19. Структурная схема системы общего вида

Предварительно необходимо получить передаточную функцию разомкнутой системы, для чего можно размыкать связь произвольным образом (рис. 4.19), а вход и выход системы следует рассматривать в месте разрыва. В результате искомая передаточная функция будет иметь вид

$$W_0(p) = W_1(p)W_2(p).$$

Далее для анализа устойчивости необходимо использовать соответствующую формулировку критерия.

#### ПРИМЕР 4.7

Проверить устойчивость системы (рис. 4.20), с помощью критерия Найквиста.

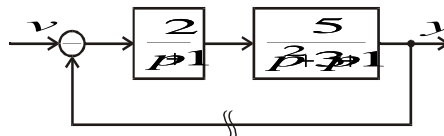


Рис. 4.20. Структурная схема системы управления

Разорвем обратную связь и определим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_0(p) = \frac{2}{p+1} \frac{5}{p^2+3p+1} = \frac{10}{p^3+4p^2+4p+1}.$$



Согласно критерию Гурвица разомкнутая система устойчива. Перейдем теперь к выражению для амплитудно-фазовой частотной характеристики

$$W_0(j\omega) = \frac{10}{(1 - 4\omega^2) + j(4\omega - \omega^3)}$$

и выделим ее вещественную и мнимую части:

$$W_0(j\omega) = \frac{10(1 - 4\omega^2)}{(1 - 4\omega^2)^2 + (4\omega - \omega^3)^2} - j \frac{10(4\omega - \omega^3)}{(1 - 4\omega^2)^2 + (4\omega - \omega^3)^2}.$$

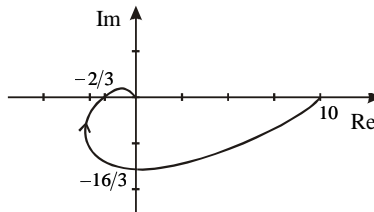


Рис. 4.21. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы

Построим амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы, изменяя  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Ниже приведены значения вещественной и мнимой частей для отдельных точек.

$\omega$	0	0,5	2	$\infty$
$\text{Im } W_0(j\omega)$	0	-16/3	0	0
$\text{Re } W_0(j\omega)$	10	0	-2/3	0

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы (рис. 4.21) не охватывает точку с координатами  $-1; j0$ . Следовательно, замкнутая система устойчива.

#### 4.3.4. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФОРМА КРИТЕРИЯ НАЙКВИСТА

Для проверки устойчивости замкнутой системы можно использовать также логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы.

**Формулировка критерия Найквиста.** Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на всех частотах, где ЛАЧХ разомкнутой системы положительная  $L(\omega) > 0$ , фазовый сдвиг не достигал значения  $-180^\circ$  или достигал его четное число раз (рис. 4.22).

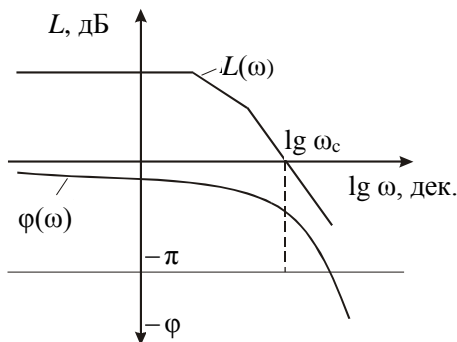


Рис. 4.22. Логарифмические частотные характеристики, иллюстрирующие критерий Найквиста

Замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если на той же частоте  $\omega_c$ , где ЛАЧХ разомкнутой системы обращается в нуль  $L(\omega_c) = 0$ , значение фазовой частотной характеристики равно  $\varphi(\omega_c) = -180^\circ$ .

#### ПРИМЕР 4.8

Проверить с помощью критерия Найквиста устойчивость системы фазовой автоподстройки частоты, упрощенная структурная схема которой приведена на рис. 4.23 [22, 45]. На рисунке:

ПГ — подстраиваемый генератор, частоту  $\omega$  которого нужно стабилизировать;

ФНЧ — фильтр нижних частот;

ФД — фазовый детектор;

$\omega_0$  — эталонная частота;

$\varphi$  — разность фаз.

Параметры передаточных функций соответствующих устройств следующие:  $T_1 = 0,1$  с,  $T_2 = 0,04$  с,  $T_3 = 0,005$  с,  $k = k_1 k_2 k_3 = 200$  с<sup>-1</sup>.

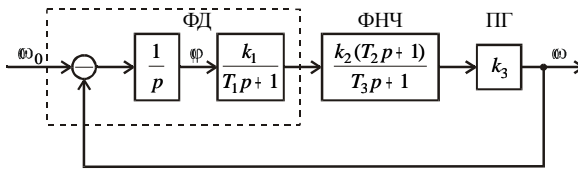


Рис. 4.23. Структурная схема системы фазовой автоподстройки частоты

Разорвем обратную связь и определим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Подставляя вместо параметров их численные значения, получим

$$W_p(p) = \frac{200(0,04 p + 1)}{0,0005 p^3 + 0,105 p^2 + p}.$$

Перейдем теперь к частотной характеристике

$$W_p(j\omega) = \frac{200(0,04 j\omega + 1)}{-0,105\omega^2 + j\omega(1 - 0,0005\omega^2)}$$

или

$$W_p(j\omega) = \frac{200 \left[ (-0,065\omega^2 + 0,00002\omega^4) - j(\omega + 0,00475\omega^3) \right]}{0,011025\omega^4 + \omega^2(1 - 0,0005\omega^2)^2}.$$

Запишем теперь выражения для амплитудно-частотной характеристики:

$$A_p(\omega) = \frac{200 \sqrt{(-0,065\omega + 0,00002\omega^3)^2 + (1 + 0,00475\omega^2)^2}}{0,011025\omega^3 + \omega(1 - 0,0005\omega^2)^2}$$

и фазочастотной характеристики:

$$\varphi_p(\omega) = \arctg \frac{-1 - 0,00475\omega^2}{-0,065\omega + 0,00002\omega^3}.$$

В логарифмическом масштабе амплитудно-частотная характеристика имеет вид

$$L_p(\omega) = 20\lg 200 - 20\lg \omega + \\ + 20\lg \left[ (-0,065\omega + 0,00002\omega^3)^2 + (1 + 0,00475\omega^2)^2 \right] - \\ - 20\lg \left[ 0,011025\omega^3 + \omega(1 - 0,0005\omega^2)^2 \right].$$

На рис. 4.24 представлены логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики разомкнутой системы.

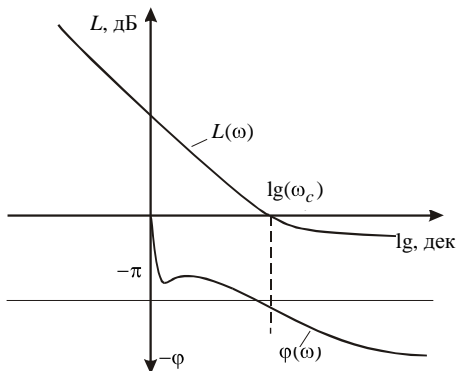


Рис. 4.24. Логарифмические характеристики разомкнутой системы

Так как логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пересекает ось абсцисс позже, чем фазовая частотная характеристика достигает значения  $\varphi(\omega)_p = -\pi$ , то замкнутая система будет неустойчива.

## 4.4. ОБЛАСТИ И ЗАПАСЫ УСТОЙЧИВОСТИ

### 4.4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Поскольку математическая модель никогда не бывает тождественна физической системе, а при ее составлении делается ряд допущений, параметры реальной системы несколько отличаются от расчетных

(номинальных). Кроме того, с течением времени параметры могут изменяться в некотором диапазоне, но для нормального функционирования системы свойство устойчивости должно сохраняться, т. е. она должна обладать определенным запасом устойчивости.

Введем понятие запаса устойчивости для системы, модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m, \quad n \geq m. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение системы

$$\det(pI - A) = 0,$$

оно имеет  $n$  корней  $\lambda_i = \lambda_i(A)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Определение:** область устойчивости по параметрам будем называть множеством матриц  $A$ , для которых выполняется общее условие устойчивости линейных систем, т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Совокупность всех этих матриц  $A$  отображается в некоторую область на плоскости параметров (рис. 4.25).

**Определение:** критическими (граничными) будем называть такие значения матриц  $A_{\text{гр}}$ , при которых система находится на границе устойчивости.

В реальной ситуации часто требуется оценить влияние одного параметра системы (например,  $a$ ) на ее устойчивость, поэтому можно говорить о «левом» и «правом» граничных значениях,  $a_{1\text{гр}}$  и  $a_{2\text{гр}}$  соответственно (рис. 4.26).

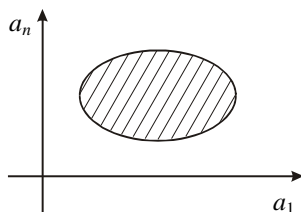


Рис. 4.25. Иллюстрация области устойчивости системы

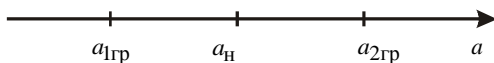


Рис. 4.26. Пример граничных значений

*Определение:* **запасом устойчивости** называется диапазон значений параметра от номинального до граничного. Например,  $|a_n - a_{1гр}|$  или  $|a_n - a_{2гр}|$ .

#### 4.4.2. ЧАСТОТНЫЕ ОЦЕНКИ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ

На основе критерия Найквиста можно получить частотные оценки запаса устойчивости, которые характеризуют удаление амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы от критической точки  $-1; j0$ .

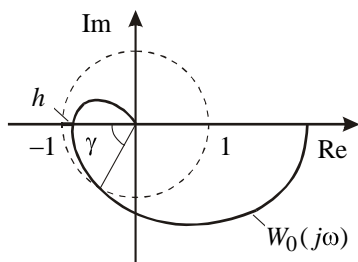


Рис. 4.27. Определение запасов устойчивости по АФХ

**Запас устойчивости по модулю (h)** показывает, насколько можно увеличить модуль АФХ разомкнутой системы без потери устойчивости замкнутой (рис. 4.27).

**Запас устойчивости по фазе ( $\gamma$ )** определяется на частоте  $\omega_c$ , где  $|W_0(j\omega_c)|=1$ . Он показывает, насколько можно изменить фазу АФХ разомкнутой системы без потери устойчивости замкнутой.

Аналогичные запасы устойчивости можно определить и по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы. В этом случае запас устойчивости по модулю будем обозначать  $\Delta L$ , единица измерения – децибел. Он показывает, во сколько раз можно увеличить коэффициент усиления системы без потери устойчивости. Определяется  $\Delta L$  на частоте, где фазовая частотная характеристика достигает значения  $-\pi$  (рис. 4.28).

Запас устойчивости по фазе будем обозначать  $\Delta\varphi$ , он определяется на частоте  $\omega_c$ , где  $L(\omega_c)=0$ , и характеризует отклонение от  $-\pi$ , т. е.

$$\Delta\varphi(\omega_c) = \pi - |\varphi(\omega_c)|. \quad (4.34)$$

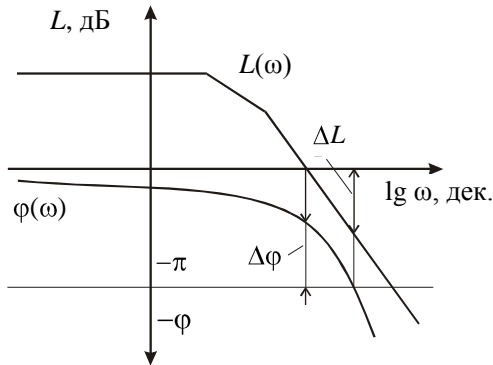


Рис. 4.28. Определение запасов устойчивости по логарифмическим характеристикам

Опытном настроек установлено, что для нормальной работы многих систем управления необходимо обеспечить следующие запасы устойчивости:

$$\Delta L \geq 8 \text{ дБ}, \quad \Delta \varphi \geq 50^\circ. \quad (4.35)$$

Эти значения получены эмпирическим путем. Исходя из технологических требований для некоторых систем могут потребоваться большие или меньшие запасы устойчивости.

#### 4.4.3. КОРНЕВЫЕ ОЦЕНКИ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ

Оценить запас устойчивости системы можно также по ее корневому портрету.

На рис. 4.29 приведены графики переходных процессов двух систем. Видно, что система 2 обладает меньшим запасом устойчивости, поскольку склонность к неустойчивости выражается в большой колебательности процессов.

В свою очередь, характер процессов в системе определяется ее полюсами согласно выражению (4.12), причем колебания будут возникать, если характеристическое уравнение содержит комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i,$$

где вещественная часть  $\alpha_i$  определяет скорость затухания, а мнимая часть корней  $\beta_i$  – частоту колебаний.

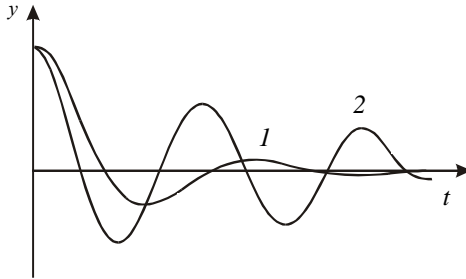


Рис. 4.29. Примеры процессов в системах с разным запасом устойчивости

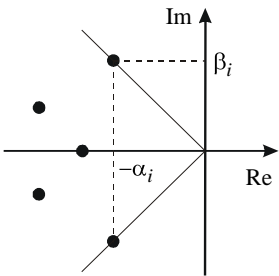


Рис. 4.30. Пример определения запаса устойчивости по корневому портрету

Паре корней с самым «широким» сектором (рис. 4.30) будет соответствовать составляющая процесса с наибольшими колебаниями, поэтому в качестве оценки запаса устойчивости можно рассматривать отношение

$$\gamma = \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \quad (4.36)$$

Отметим, что значение  $\gamma$  может изменяться в диапазоне  $\gamma \in 0; \infty$ . Чем меньше  $\gamma$  (больше величина мнимой части корня  $\beta_i$  или меньше вещественная часть), тем ближе будет система к границе устойчивости. В случае, когда  $\gamma = 0$ , она находится на границе устойчивости. При  $\gamma = \infty$  система будет иметь бесконечный запас устойчивости.

Таким образом, корневая оценка запаса устойчивости  $\gamma$  характеризует, насколько можно изменять корни характеристического уравнения без потери системой устойчивости.



Обычно такая оценка используется на этапе проектирования, так как ее трудно связать с параметрами реальной системы автоматического управления (коэффициентом усиления, постоянными времени, коэффициентом демпфирования).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрели понятие устойчивости линейных систем, которое является одним из важнейших ее качественных свойств и обуславливает работоспособность системы автоматического управления.

Отметим, что устойчивость линейной системы определяется ее собственными свойствами и не зависит от внешних факторов, поэтому она будет предсказуемым образом реагировать на различные внешние воздействия и начальные условия. Для анализа устойчивости в зависимости от ситуации можно использовать различные критерии, описание которых приведено в разделе.

С целью нормального функционирования системы свойство устойчивости должно сохраняться при изменении ее параметров в некотором диапазоне, поэтому на этапе проектирования необходимо проверить наличие определенного запаса устойчивости системы. Приведены также способы их оценки.

## ЗАДАЧИ

**4.1.** С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы, передаточная функция которой имеет вид

$$W(p) = \frac{10(2p+1)}{p(p+1)(3p+1)}.$$

**4.2.** С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы (рис. 4.31), если

$$W_1(p) = \frac{1}{p+2}, \quad W_2(p) = \frac{5}{p^2+3p+1}.$$

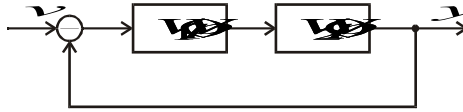


Рис. 4.31. Структурная схема системы к задаче 4.2

**4.3.** С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы (рис. 4.32), если  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $k_3 = 2$ ,  $k_4 = 5$ ,  $T_1 = 1$  с,  $T_2 = 0,5$  с.

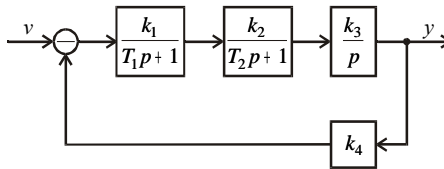


Рис. 4.32. Структурная схема системы к задаче 4.3

**4.4.** С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость замкнутой системы, если уравнения состояния разомкнутой системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_2 - 5x_3 + 10u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

**4.5.** С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы (рис. 4.33), если

$$W_1(p) = \frac{1}{p+1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{0,5p+1}, \quad W_3(p) = \frac{4}{p}.$$

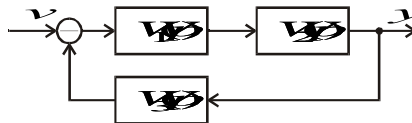


Рис. 4.33. Структурная схема системы к задаче 4.5

**4.6.** Используя критерий Михайлова, проверить устойчивость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

**4.7.** Используя критерий Михайлова, проверить устойчивость системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{10}{p^3 + 3p^2 + 2p + 6}.$$

**4.8.** С помощью критерия Михайлова проверить устойчивость системы (см. рис. 4.31), если

$$W_1(p) = \frac{10}{p}, \quad W_2(p) = \frac{1}{2p^2 + 3p + 1}.$$

**4.9.** С помощью критерия Михайлова проверить устойчивость системы (см. рис. 4.33), если

$$W_1(p) = \frac{20}{0,01p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{3}{0,25p^2 + 0,5p + 1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{0,2p + 1}.$$

**4.10.** С помощью критерия Михайлова проверить устойчивость системы (рис. 4.34).

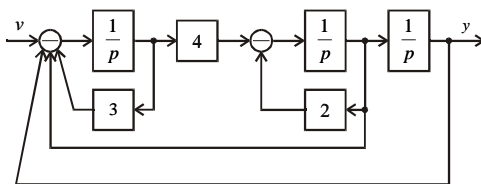


Рис. 4.34. Структурная схема системы к задаче 4.10

**4.11.** Проверить устойчивость замкнутой системы с отрицательной обратной связью, используя критерий Найквиста, если передаточная функция разомкнутой имеет вид

$$W_p(p) = \frac{2(p+1)}{p(0,1p^2 + 0,1p + 1)}.$$

**4.12.** С помощью критерия Найквиста проверить устойчивость системы (см. рис. 4.31), если

$$W_1(p) = \frac{15}{4p+1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{3p^2 + p + 1}.$$

**4.13.** С помощью критерия Найквиста проверить устойчивость системы (рис. 4.35).

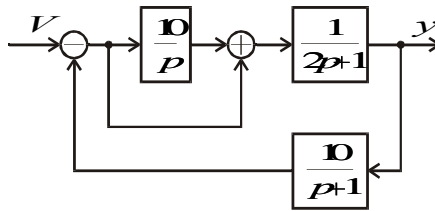


Рис. 4.35. Структурная схема системы к задаче 4.13

**4.14.** С помощью критерия Найквиста проверить устойчивость системы (рис. 4.36) при  $k = 4$ ,  $T = 1$ .

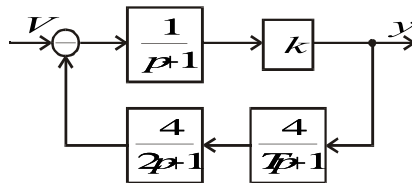


Рис. 4.36. Структурная схема системы к задаче 4.14

**4.15.** Проверить устойчивость замкнутой системы с помощью логарифмического критерия Найквиста, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{12(p+1)}{p(4p^2 + 2p + 1)}.$$

**4.16.** С помощью критерия Гурвица определить значение  $T_{\text{гр}}$  для системы (см. рис. 4.31), если

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp + 1}, \quad W_2(p) = \frac{2,5}{0,5p^2 + 0,2p + 1}.$$

**4.17.** С помощью критерия Гурвица определить область допустимых значений коэффициента  $k$  для системы (см. рис. 4.33), где

$$W_1(p) = \frac{k}{5p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{10}{2p + 1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{0,1p + 1}.$$

**4.18.** С помощью критерия Михайлова определить значение  $d_{\text{гр}}$  для системы (см. рис. 4.31), если

$$W_1(p) = \frac{15}{2p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{0,25p^2 + dp + 1}.$$

**4.19.** С помощью критерия Михайлова определить область допустимых значений коэффициента  $k$  для системы (см. рис. 4.33), где

$$W_1(p) = \frac{2}{0,1p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k}{0,2p + 1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{0,01p + 1}.$$

**4.20.** С помощью критерия Найквиста определить значение  $T_{\text{гр}}$  для системы (см. рис. 4.31), если

$$W_1(p) = \frac{5}{Tp + 1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{p(4p + 1)}.$$

**4.21.** С помощью критерия Найквиста определить область допустимых значений коэффициента  $k$  для системы (см. рис. 4.33), где

$$W_1(p) = \frac{k}{3p+1}, \quad W_2(p) = \frac{10}{2p+1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{0,4p+1}.$$

**4.22.** Определить область допустимых значений общего коэффициента усиления  $k$  для системы фазовой автоподстройки частоты, упрощенная структурная схема которой приведена на рис. 4.23.

---

---

## Глава 5

# АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

**Р**абота системы автоматического управления помимо устойчивости оценивается рядом показателей, основными из которых являются точность отработки входных воздействий и характер переходных процессов.

В общем случае *задача анализа* формулируется следующим образом: при известной структуре системы, заданной передаточной функцией  $W(p)$ , или матрицами  $A, B, C$ , или какой-либо динамической характеристикой, и известном входном воздействии  $v$  необходимо оценить переходные процессы на выходе, т. е. определить  $y(t)$ .

При известной математической модели и начальных условиях

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y &= Cx, & y \in R^m, \\ x(0) &= x_0, & n \geq m \end{aligned} \quad (5.1)$$

можно рассчитать переходные процессы, используя соотношение

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (5.2)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой реакцию на начальные условия, второе – на входное воздействие.

Заметим, для системы высокого порядка неудобно вычислять  $y(t)$  по выражению (5.2), еще сложнее оценивать влияние отдельных параметров на вид переходных процессов.

Поскольку в реальных системах закон изменения действующих на объект возмущений заранее, как правило, неизвестен, рассматривают реакцию системы управления на некоторые типовые воздействия, близкие к реальным. Относительно «тяжелым» для отработки является единичное ступенчатое воздействие, и если удастся обеспечить определенное качество работы системы при подобном входном сигнале, то она будет удовлетворительно работать и при других воздействиях.

О качестве работы динамической системы можно судить по косвенным признакам, которые называются показателями качества переходного процесса и определяются без непосредственного расчета переходного процесса. При этом всегда предполагается, что исследуемая система устойчива, так как бессмысленно оценивать качество неустойчивых процессов.

Различные способы анализа показателей качества переходного процесса представлены в данной главе.

## 5.1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим одноканальную систему стабилизации, для которой входное воздействие является постоянной величиной ( $v = \text{const}$ ), а цель регулирования состоит в организации свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v. \quad (5.3)$$

Основными показателями качества таких систем являются следующие количественные характеристики переходного процесса.

### 5.1.1. ОШИБКА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Для оценки точности используется *ошибка регулирования*

$$\Delta(t) = v - y(t), \quad (5.4)$$

которая с течением времени стремится к некоторому постоянному значению (рис. 5.1), называемому **статической ошибкой**:

$$\Delta^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t). \quad (5.5)$$



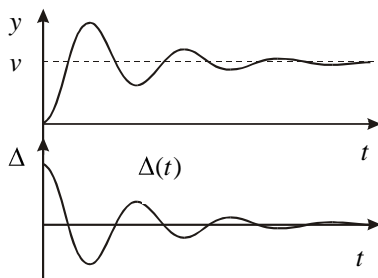


Рис. 5.1. Пример изменения ошибки во времени

При известной структурной схеме системы ошибку можно определить в операторной форме с помощью структурных преобразований

$$\Delta(p) = v(p) - y(p). \quad (5.6)$$

В этом случае статический режим характеризуется тем, что  $p = 0$ , а статическая ошибка находится по выражению

$$\Delta^0 = \Delta(0). \quad (5.7)$$

**Динамической ошибкой** будем называть величину

$$\Delta_d(t) = \Delta(t) - \Delta^0, \quad (5.8)$$

причем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_d(t) = 0$ .

Отметим, что ошибка (статическая ошибка) является одной из основных количественных характеристик процессов системы.

### 5.1.2. БЫСТРОДЕЙСТВИЕ

В качестве оценок быстродействия можно использовать различные величины, причем все они определяют время от начала процесса до какого-либо характерного значения. С этой целью рассмотрим переходную характеристику системы  $h(t)$ , показанную на рис. 5.2.

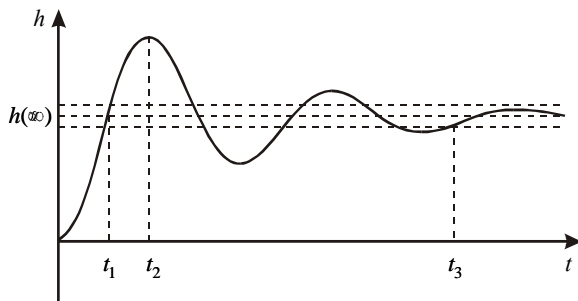


Рис. 5.2. Иллюстрация оценок быстродействия

Оценками быстродействия могут служить:

- $t_1$  — время от начала процесса до первого момента достижения установившегося значения  $h(\infty)$  (применимо только для колебательных процессов);
- $t_2$  — время достижения первого максимума (также только для колебательных процессов);
- $t_3$  — время от начала процесса до момента достижения установившегося значения  $h(\infty)$  со статической ошибкой  $\Delta^0$ , не превышающей заданного значения.

На практике в качестве оценки быстродействия чаще всего используют величину  $t_3$ , которую обычно обозначают  $t_n$  и называют **временем переходного процесса**.

### 5.1.3. ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЕ

Эта количественная оценка характеризует колебательные свойства системы, обозначается буквой  $\sigma$  и определяется в процентах относительно установившегося значения (рис. 5.3) по выражению

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100 \%. \quad (5.9)$$

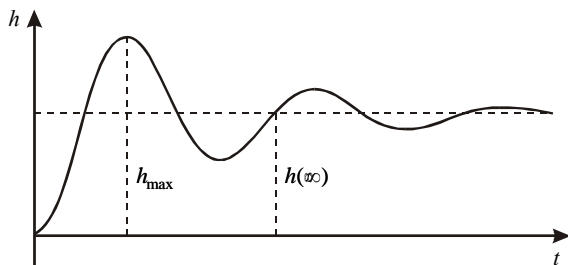


Рис. 5.3. Иллюстрация оценки перерегулирования

Очевидно, чем больше перерегулирование  $\sigma$ , тем более система склонна к колебаниям.

#### 5.1.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Интегральные оценки представляют собой обобщенные показатели качества переходного процесса. Обычно для их определения используют динамическую ошибку.

Интегральной оценкой могут служить следующие величины:

1) первая интегральная оценка

$$I_1 = \int_0^t \Delta_d(\tau) d\tau, \quad (5.10)$$

которая дает объективные результаты только в случае монотонного переходного процесса;

2) вторая интегральная оценка

$$I_2 = \int_0^t |\Delta_d(\tau)| d\tau, \quad (5.11)$$

которая характеризует площадь под кривой  $|\Delta_d(t)|$  на рис. 5.4;

3) третья интегральная оценка

$$I_3 = \int_0^t \Delta_d^2(\tau) d\tau. \quad (5.12)$$

Наиболее удобной оценкой является  $I_3$ , которая сравнительно просто вычисляется и может применяться для характеристики как монотонного, так и колебательного процесса. Она отражает, по существу, затраты энергии на совершение переходного процесса.

Идеальный переходный процесс (без лишних потерь энергии) показан на рис. 5.5.

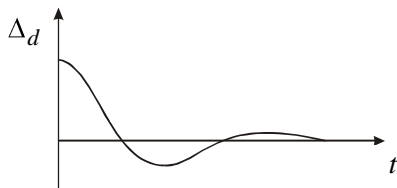


Рис. 5.4. Пример динамической ошибки системы

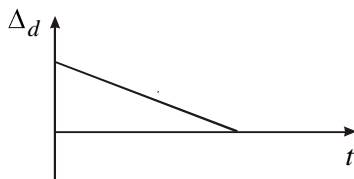


Рис. 5.5. Идеальный переходный процесс

В общем случае интегральная оценка качества переходного процесса записывается следующим образом:

$$I = \int_0^t \Psi(\Delta_d(\tau), \dot{\Delta}_d(\tau), \dots) d\tau, \quad (5.13)$$

где  $\Psi(\cdot)$  – некоторая функция ошибки.

Применение конкретной интегральной оценки зависит от вида переходного процесса и требований, предъявляемых к системе.

## 5.2. АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

**Статическим (установившимся)** называют такой режим работы линейной системы, при котором переменные с течением времени не изменяются. В зависимости от природы статической ошибки  $\Delta^0$ , характеризующей данный режим, можно выделить несколько основных типов систем.

### 5.2.1. СТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

**Статической** будем называть такую систему управления (рис. 5.6), функционирование которой всегда предполагает наличие статической ошибки  $\Delta^0 \neq 0$ .

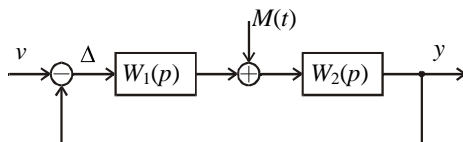


Рис. 5.6. Структурная схема статической системы

На рис. 5.6  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  – передаточные функции, которые не содержат в своем составе интеграторов, поэтому в статике они вырождаются в коэффициенты усиления  $W_1(0) = k_1$ ;  $W_2(0) = k_2$ . Как правило, первый блок системы представляет собой регулятор (с передаточной функцией  $W_1(p)$ ), а второй – объект управления (с передаточной функцией  $W_2(p)$ ).

Запишем выражение для ошибки:

$$\Delta = v - y = v - W_2(p)[M + W_1(p)\Delta],$$

или после преобразований:

$$\Delta = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} v - \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} M. \quad (5.14)$$

Полная ошибка регулирования складывается из двух составляющих: одна из них порождена входным воздействием, вторая – возмущением. Этот факт соответствует *принципу суперпозиции*, который справедлив для линейных систем: реакция системы на несколько внешних воздействий представляет собой сумму реакций на каждое воздействие отдельно.

Полную статическую ошибку получим, полагая  $p = 0$  в (5.14), она соответствует выражению

$$\Delta^0 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} v - \frac{k_2}{1 + k_1 k_2} M, \quad (5.15)$$

где  $k = k_1 k_2$  – общий коэффициент усиления, характеризующий глубину обратной связи.

Как видим, в рассматриваемых системах присутствует отличная от нуля статическая ошибка, которую всегда стремятся уменьшить. Согласно (5.15) статическая ошибка по входному воздействию определяется величиной  $k$ , а ошибка по возмущению зависит только от  $k_1$ . Следовательно, с целью уменьшения полной статической ошибки  $\Delta^0$  необходимо увеличивать общий коэффициент усиления системы прежде всего за счет коэффициента  $k_1$ . Однако его чрезмерное увеличение может привести к неустойчивости системы управления. Таким образом, требования точности и устойчивости оказываются противоречивыми и приходится определять коэффициент усиления, который обеспечивает определенную точность без потери системой устойчивости.

Особое значение статическая ошибка имеет в системах стабилизации, когда требуется обеспечить выполнение свойства (5.3)  $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = v$  при постоянном входном воздействии ( $v = \text{const}$ ). В этом случае посредством масштабирования входного сигнала всегда можно скомпенсировать составляющую ошибки, порожденную  $v$ , а коэффициент  $k_1$  следует выбирать из условия заданной ошибки от возмущения.

### ПРИМЕР 5.1

Для системы управления, структурная схема которой представлена на рис. 5.7, определить коэффициент усиления регулятора  $k_p$  так, чтобы статическая ошибка не превышала значения  $\Delta_*^0 = 5\%$  от  $v$ .

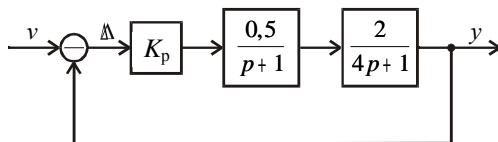


Рис. 5.7. Структурная схема системы

Ошибка от входного воздействия определяется в соответствии с (5.14) следующим выражением:

или

$$\Delta = \frac{1}{1 + k_p W_1(p) W_2(p)} v$$

$$\Delta = \frac{4p^2 + 5p + 1}{4p^2 + 5p + 1 + k_p} v.$$

При  $p = 0$  получим статическую ошибку

$$\Delta^0 = \frac{1}{1 + k_p} v,$$

которая должна удовлетворять неравенству

$$\Delta^0 \leq \Delta_*^0, \text{ или } \frac{1}{1 + k_p} \leq 0,05.$$

Отсюда находим значение коэффициента усиления регулятора  $k_p \geq 19$ , обеспечивающего требуемую статическую ошибку.

## 5.2.2. АСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

**Астатическими** называют системы, в которых отсутствует составляющая статической ошибки, порожденная постоянным входным воздействием. Астатизм обычно достигается введением в состав регулятора интегрирующего звена (рис. 5.8).

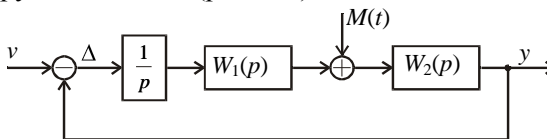


Рис. 5.8. Структурная схема астатической системы

Будем полагать, что передаточные функции  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  не содержат в своем составе интегрирующих звеньев, и определим ошибку в системе

$$\Delta = v - y = v - W_2(p) \left[ M + \frac{W_1(p)}{p} \Delta \right].$$

После преобразования это выражение принимает вид

$$\Delta = \frac{p}{p + W_1(p)W_2(p)} v - \frac{pW_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)} M. \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что в статике при  $p = 0$  обе составляющие ошибки будут равны нулю (ошибка по входному воздействию и ошибка по возмущению), т. е.

$$\Delta^0 = 0. \quad (5.17)$$

Для астатических систем представляет интерес режим работы, который называют **режимом линейной заводки**, когда входной сигнал  $v$  представляет собой линейное нарастающее воздействие,

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \eta d\tau,$$

или в операторной форме

$$v = \frac{1}{p} \eta, \quad (5.18)$$

где  $\eta = \text{const}$ .

Подставим входной сигнал (5.18) в выражение для ошибки (5.16):

$$\Delta = \frac{p}{p + W_1(p)W_2(p)} \frac{1}{p} \eta - \frac{pW_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)} M.$$

В статике получим так называемую **скоростную ошибку**,

$$\Delta^0 = \frac{1}{k_1 k_2} \eta, \quad (5.19)$$

уменьшить которую можно увеличением общего коэффициента усиления системы.



### 5.2.3. СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ (СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ)

Этим термином обозначают класс систем, в которых выходная переменная является положением (позицией) какого либо технического объекта и должна отслеживать (повторять) изменения входной величины. Структурным признаком таких систем является наличие на ее выходе интегрирующего звена (рис. 5.9).

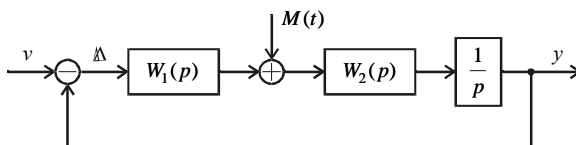


Рис. 5.9. Структурная схема следящей системы

Запишем выражение для ошибки

$$\Delta = \frac{p}{p + W_1(p)W_2(p)} v - \frac{W_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)} M. \quad (5.20)$$

Как и в случае астатических систем, в статике первая составляющая ошибки обращается в нуль. Однако вторая составляющая ошибки, порожденная возмущением, отлична от нуля:

$$\Delta^0 = -\frac{1}{k_1} M \quad (5.21)$$

и зависит от коэффициента усиления  $k_1$ .

В следящих системах можно также рассмотреть режим «линейной заводки». В этом случае статическая ошибка представляет собой сумму двух составляющих

$$\Delta^0 = \frac{1}{k_1 k_2} \eta - \frac{1}{k_1} M(t). \quad (5.22)$$

Режим «линейной заводки» используется для оценки точности следящих систем, для которых он является характерным режимом работы.

**ПРИМЕР 5.2**

Определить скоростную ошибку в системе управления рукой робота (рис. 5.10).

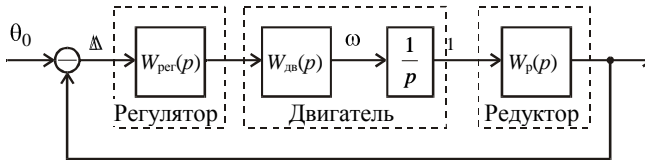


Рис. 5.10. Структурная схема системы управления рукой робота

Здесь  $\theta_0$  – желаемое (заданное) положение руки робота; в качестве регулятора используется пропорциональный регулятор с передаточной функцией  $W_{\text{рег}}(p) = k_{\text{рег}}$ ; передаточные функции двигателя и редуктора рассмотрены в примере 4.6 и имеют вид

$$W_{\text{дв}}(p) = \frac{0,6}{0,13p^2 + 1,43p + 1}, \quad W_{\text{р}}(p) = \frac{1}{30}.$$

Запишем выражение для ошибки в системе

$$\Delta = \frac{p}{p + W_{\text{рег}}(p)W_{\text{дв}}(p)W_{\text{р}}(p)} \theta_0,$$

которая в случае режима линейной заводки  $\theta_0 = \Omega t$ ,  $\Omega = \text{const}$  принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{p + W_{\text{рег}}(p)W_{\text{дв}}(p)W_{\text{р}}(p)} \Omega.$$

В статике получим скоростную ошибку системы

$$\Delta^0 = \frac{1}{W_{\text{рег}}(0)W_{\text{дв}}(0)W_{\text{р}}(0)} \Omega.$$

С учетом численных значений коэффициентов усиления передаточных функций она будет равна  $\Delta^0 = \frac{50}{k_{\text{рег}}} \Omega$ .

### 5.2.4. НЕЕДИНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

До сих пор мы рассматривали структурные схемы, в которых присутствовала главная (основная) обратная связь с единичным коэффициентом передачи от выходной величины  $y$  к сигналу обратной связи, поступающему на сумматор (рис. 5.11).

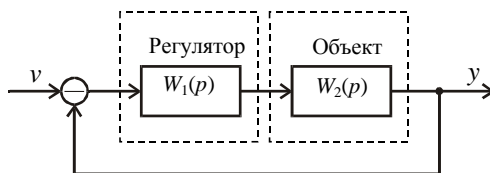


Рис. 5.11. Схема с единичной обратной связью

В реальных системах подобная ситуация встречается очень редко. Как правило, выходной сигнал не является электрическим, это может быть угол поворота, скорость вращения, сила и т. д. Он измеряется с помощью датчика и преобразуется в электрический сигнал обратной связи, для которой имеет место неединичный коэффициент передачи (рис. 5.12). Здесь  $\tilde{y}$  – реальный выходной сигнал объекта управления;  $y$  – выходной сигнал с датчика;  $v$  – входной сигнал, который в реальной системе всегда имеет ту же размерность, что и выходной сигнал датчика;  $K_d$  – коэффициент передачи датчика. Обычно инерционность датчика намного меньше, чем у объекта, поэтому его модель можно представить просто в виде коэффициента усиления.

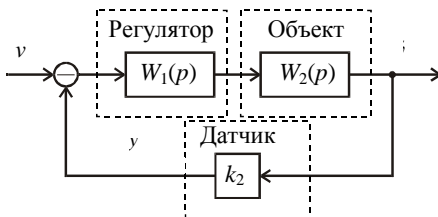


Рис. 5.12. Система с датчиком в канале обратной связи

При исследовании свойств системы управления удобно отнести коэффициент передачи датчика к объекту и рассматривать структурную схему, изображенную на рис. 5.13. В этом случае выходной переменной преобразованной системы является выходной сигнал датчика  $y$ .

В дальнейшем, кроме специально оговоренных ситуаций, рассматривая замкнутую систему, будем предполагать именно такую структуру (рис. 5.13).

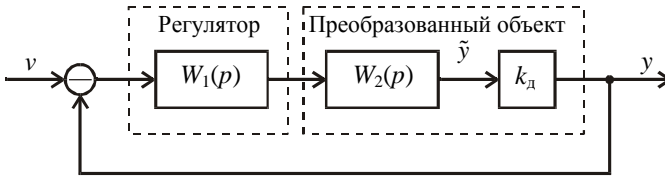


Рис. 5.13. Преобразованная система с датчиком

Отметим, что входной сигнал  $v$ , который поступает на регулятор, задает желаемое (предписанное) значение выхода  $y$ . В реальной системе управления этот сигнал ( $v$ ) обычно является электрическим и измеряется в вольтах, как и выход датчика ( $y$ ), т.е. оба сигнала измеряются в одних и тех же единицах.

Если возникает необходимость исследовать влияние помех измерения, то систему с датчиком удобно представлять в виде структуры, показанной на рис. 5.14.

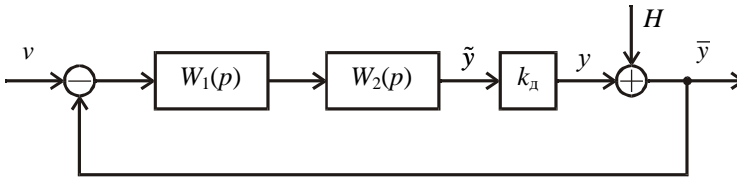


Рис. 5.14. Преобразованная система с датчиком и помехой измерения

Здесь  $\bar{y}$  – измеренное с помехой значение выходной переменной;  $H(t)$  – помеха измерения. Как правило, она представляет собой случайную функцию времени, диапазон изменения и частотный спектр которой можно оценить.

Очевидно, что в реальной системе удастся стабилизировать не выходную переменную  $y$ , а сигнал  $\bar{y}$ . Таким образом, вместо требования (5.9) мы имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y} = v$ , и предельное значение  $y$  будет отличаться от заданного  $v$  на величину помехи измерения  $H(t)$ , т. е.  $y = v - H(t)$ . Это обстоятельство чрезвычайно важно, и мы будем о нем говорить при изучении методов синтеза систем управления.

### ПРИМЕР 5.3

Определить абсолютную статическую ошибку в системе управления двигателем постоянного тока (рис. 5.15) при заданной скорости вращения  $\omega^0 = 300$  об/мин.

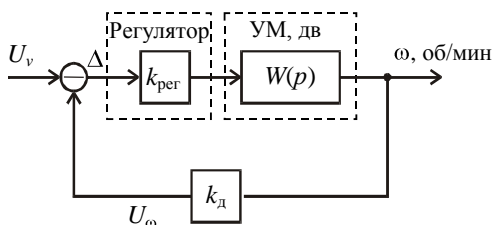


Рис. 5.15. Структурная схема системы управления двигателем

Здесь  $U_v$  – напряжение, соответствующее желаемому значению скорости вращения двигателя  $\omega^0$ ;  $U_\omega$  – выходное напряжение датчика, пропорциональное скорости вращения двигателя  $\omega$ ;  $K_d = 0,01$  В/об/мин – коэффициент передачи датчика;  $W(p) = \frac{10}{(0,04p + 1)(0,1p + 1)}$  – общая передаточная функция усилителя мощности (УМ) и двигателя (дв);  $k_{\text{рег}} = 240$  – коэффициент усиления регулятора.

Структурную схему системы приведем к виду, изображенному на рис. 5.13, и определим ошибку

$$\Delta = U_v - U_\omega = \frac{1}{1 + k_{\text{рег}} W(p) k_d} U_v.$$

Запишем выражение для статической ошибки, порожденной входным воздействием,

$$\Delta^0 = \frac{1}{1 + k_p W(0)k_d} U_v = \frac{1}{1 + 24} U_v,$$

или  $\Delta^0 = 0,04 U_v$ .

Исходя из заданного значения скорости вращения двигателя  $\omega^0$  и известного коэффициента передачи датчика определим соответствующее входное напряжение

$$U_v = K_d \omega^0 = 3 \text{ В}.$$

Отсюда абсолютная статическая ошибка  $\Delta^0 = 0,12 \text{ В}$ , а ошибка по скорости вращения двигателя в установившемся режиме составит  $\Delta \omega^0 = 12 \text{ об/мин}$ .

## 5.3. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА

### 5.3.1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В большинстве случаев вычисление переходной характеристики системы не требуется и в расчетной практике часто используют косвенные методы оценки качества процессов.

Известно, что между переходными и частотными характеристиками системы, которые легко вычисляются, а также могут быть получены экспериментальным путем, существует однозначное соответствие [6]. Поэтому качество переходных процессов системы можно исследовать непосредственно по ее частотным характеристикам. С этой целью можно использовать соотношения

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \tag{5.23}$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Отметим, что частотный метод анализа позволяет оценить реакцию системы на входное воздействие  $v(t)$  при нулевых начальных условиях (второе слагаемое решения (5.2)).

### 5.3.2. ОЦЕНКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Такие оценки оказываются особенно удобны в случае, когда для исследования системы применяются частотные характеристики, а переходный процесс вызван скачкообразным входным воздействием.

В результате анализа соотношения (5.23) были получены следующие оценки качества переходного процесса.

**Оценка 1.** Начальное значение переходной характеристики соответствует конечному значению вещественной частотной характеристики (рис. 5.16, 5.17)

$$h(0) = R(\infty).$$

**Оценка 2.** Установившееся значение переходной характеристики равно начальному значению вещественной частотной характеристики (рис. 5.16, 5.17)

$$h(\infty) = R(0).$$

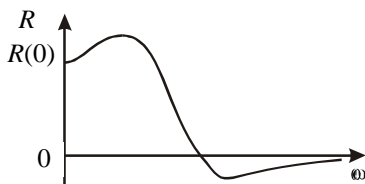


Рис. 5.16. Вещественная частотная характеристика

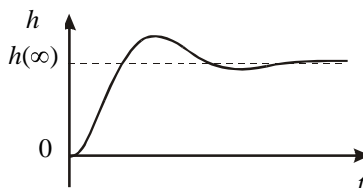


Рис. 5.17. Переходная характеристика

**Оценка 3.** Если для частотных характеристик двух систем (рис. 5.18) справедливо

$$R_2(\omega) = mR_1(\omega) \text{ или } R_2(\omega) = m^{-1}R_1(\omega),$$

то аналогичное соотношение будет связывать и переходные характеристики

$$h_2(t) = mh_1(t) \text{ или } h_2(t) = m^{-1}h_1(t).$$

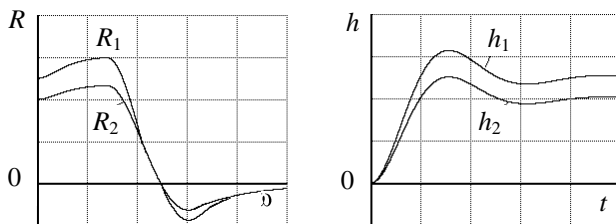


Рис. 5.18. Иллюстрация оценки 3

**Оценка 4.** В случае, когда частотные характеристики двух систем (рис. 5.19) связаны следующим образом:

$$R_2(\omega) = R_1(m\omega),$$

для переходных характеристик справедливо соотношение

$$h_2(t) = h_1(m^{-1}t).$$

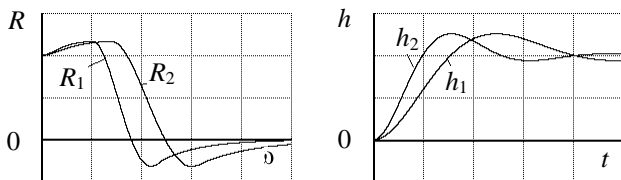


Рис. 5.19. Иллюстрация оценки 4

**Оценка 5.** Если вещественная частотная характеристика  $R(\omega)$  является положительной невозрастающей функцией, то перерегулирование в системе не будет превышать 18 %.

**Оценка 6.** Переходная характеристика имеет монотонный характер, если  $dR(\omega)/d\omega$  представляет собой отрицательную, убывающую по модулю непрерывную функцию.



**Оценка 7.** В случае, когда  $R(\omega)$  есть локально возрастающая функция (рис. 5.20), перерегулирование можно приблизительно оценить следующим образом:

$$\sigma < \left( \frac{1,18R_{\max} - R(0)}{R(0)} \right) 100 \%$$

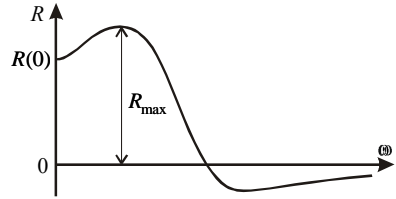


Рис. 5.20. Иллюстрация оценки 7

**Оценка 8.** Если на частоте  $\omega_0$  вещественная частотная характеристика  $R(\omega)$  (рис. 5.21) терпит разрыв, то переходная характеристика будет иметь незатухающие колебания этой частоты.

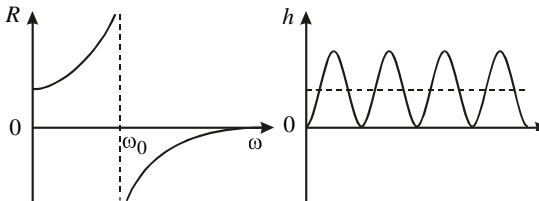


Рис. 5.21. Иллюстрация оценки 8

**Оценка 9.** В случае монотонной частотной характеристики (рис. 5.22) время переходного процесса можно приблизительно оценить по формуле

$$t_n = \frac{k\pi}{\omega_n}, \quad k = (1, \dots, 4).$$

Если частотная характеристика  $R(\omega)$  всегда положительна, то в качестве  $\omega_n$  выбирается частота, на которой  $R(\omega_n) = 0,5R(0)$ .

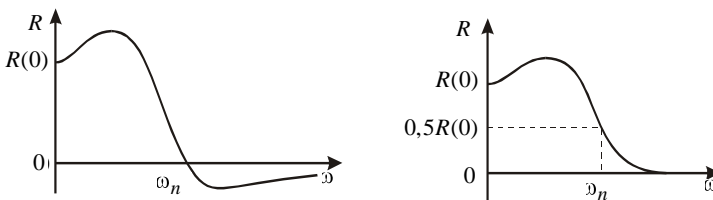


Рис. 5.22. Определение частоты  $\omega_n$  по вещественной частотной характеристике

Таким образом, с помощью приведенных оценок можно приближенно (без вычислений) оценить качество переходного процесса в системе по известной вещественной частотной характеристике. Более подробно частотный способ оценки качества переходного процесса описан в работах В.В. Солодовникова, например в [38].

### 5.3.3. О НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Используя частотные характеристики, можно оценить также вид переходного процесса на начальном участке. Рассмотрим этот способ для системы с передаточной функцией общего вида

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1}.$$

Заменяв  $p$  на  $j\omega$ , перейдем к ее частотной характеристике

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_n (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1}. \quad (5.24)$$

Согласно оценке 2 начальное значение переходной функции соответствует конечному значению вещественной частотной характеристики. Аналогичная взаимосвязь существует между переходной и амплитудно-фазовой характеристиками, поэтому исследуем АФХ в области высоких частот, для чего в выражении (5.24) устремим  $\omega \rightarrow \infty$ . В этом случае доминирующими слагаемыми в числителе и знаменателе будут старшие степени полиномов от  $(j\omega)$ , и в пределе (5.24) вырождается в соотношение

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m}{(j\omega)^n}. \quad (5.25)$$

Как видим, частотную характеристику (5.25) имеет интегратор  $(n - m)$ -го порядка, следовательно, и начальный участок переходного процесса соответствует интегратору  $(n - m)$ -го порядка.

## 5.4. КОРНЕВОЙ МЕТОД АНАЛИЗА

Данный метод анализа, в отличие от частотного, позволяет исследовать реакцию системы на начальные условия (первое слагаемое решения (5.2)) и может быть применен в случае как одноканальных, так и многоканальных систем.

Рассмотрим одноканальные системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, u \in R^1, \\ y = Cx, & y \in R^1. \end{cases} \quad (5.26)$$

Общая реакция на входной сигнал при ненулевых начальных условиях описывается соотношением

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

и является частным случаем (5.2).

Нас интересует первая составляющая правой части уравнения, которая представляет собой линейную комбинацию мод (2.37)

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \gamma_i,$$

где  $\lambda_i$  – корни характеристического уравнения системы ( $i = 1, \dots, n$ ).

Отметим, что каждая мода эквивалентна решению системы первого или второго (если корни комплексно-сопряженные) порядка, а скорость затухания соответствующей экспоненты зависит от численного значения  $\lambda_i$ . Следовательно, на основе корней характеристического уравнения системы можно оценить граничные составляющие ее переходного процесса: самую быструю моду, самую колебательную и т.п.

### 5.4.1. КОРНЕВЫЕ ОЦЕНКИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим характеристическое уравнение системы

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1 = 0$$

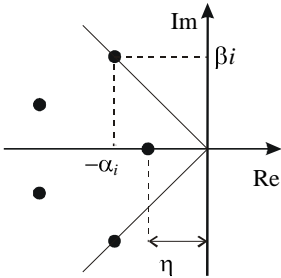


Рис. 5.23. Пример корневого портрета системы

с корнями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , которые изобразим на комплексной плоскости (рис. 5.23).

Наиболее удаленные от мнимой оси корни (имеющие  $\max |\operatorname{Re} \lambda_i|$ ) определяют моды, затухающие быстрее всего. Корни характеристического уравнения, расположенные ближе всего к мнимой оси (с  $\min |\operatorname{Re} \lambda_i|$ ), дают особенно медленно затухающие моды, которые и определяют длительность переходного процесса.

Таким образом, корневой оценкой быстродействия может служить расстояние до мнимой оси от ближайшего к ней корня, т. е.

$$\eta = \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.27)$$

Приблизительно оценить время переходного процесса можно по соотношению

$$t_n \cong \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta^0}, \quad (5.28)$$

где  $\delta^0$  – относительная статическая ошибка.

В случае, когда статическая ошибка  $\delta^0 \cong 0,05$ , можно пользоваться оценкой

$$t_n \cong \frac{3}{\eta}.$$

Колебательные процессы в системе будут наблюдаться только в том случае, когда характеристическое уравнение содержит комплексно-сопряженные корни  $\lambda_{i, i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$ . Склонность системы к колебаниям характеризует оценка

$$\mu = \max_i \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \quad (5.29)$$

которую называют **колебательностью**.

Таким образом, чем больше величина  $\mu$ , тем более колебательный характер будут иметь переходные процессы и наоборот. В пределе при  $\mu \rightarrow \infty$  полюса системы будут «чисто» мнимыми и в ней будут наблюдаться переходные процессы в виде незатухающих колебаний. В случае, когда  $\mu = 0$ , все корни характеристического уравнения будут вещественными и в системе будут возникать аperiodические процессы. Эмпирическим путем установлена взаимосвязь между колебательностью и перерегулированием в виде соотношения

$$\sigma = 100 \exp(-\pi/\mu) \%.$$

Отметим, что при  $\mu \leq 1,57$  значение перерегулирования в системе составит  $\sigma \leq 30\%$ .

## 5.5. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ НИЗКОГО ПОРЯДКА

Поведение многих реально существующих объектов и систем управления можно описать уравнениями не выше третьего порядка, поэтому важно установить взаимосвязь между параметрами математической модели и качеством протекающих в системах переходных процессов.

### 5.5.1. СИСТЕМА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Свойства системы первого порядка, поведение которой описывает передаточная функция вида

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (5.30)$$

определяют два параметра: коэффициент усиления  $k$  и постоянная времени  $T$ .

Реакция системы на постоянное входное воздействие  $v = \text{const}$  представляет собой экспоненту, скорость затухания которой зависит от  $T$ , а установившееся значение (статика) для выходной переменной соответствует выражению

$$y^0 = W(0)v = kv. \quad (5.31)$$

Напомним, что переходный процесс можно считать закончившимся, когда выходная переменная достигает установившегося значения с точностью не менее 5 % (рис. 5.24).

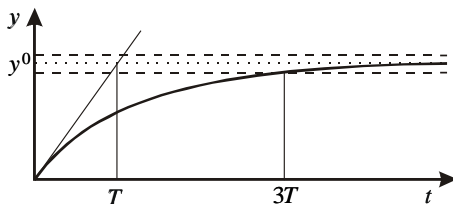


Рис. 5.24. Переходный процесс в системе первого порядка

Так как система (5.30) имеет только один корень характеристического уравнения  $\lambda = -1/T$ , то  $\eta = 1/T$ , а время переходного процесса в соответствии с (5.28) можно считать равным

$$t_n \approx 3T. \quad (5.32)$$

Таким образом, коэффициент усиления  $k$  определяет установившееся значение переходных процессов в системе первого порядка, а постоянная времени  $T$  — их длительность.

### 5.5.2. СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь свойства системы второго порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}. \quad (5.33)$$

Переходные процессы в ней зависят от трех параметров: коэффициента усиления  $k$ , который определяет установившееся значение для выходной переменной в соответствии с выражением (5.24); постоянной времени  $T$  и коэффициента демпфирования  $d$ .

В литературе [6, 40] приводятся нормированные переходные характеристики в зависимости от  $d$ . Качественный вид их представлен на рис. 5.25.

Время переходного процесса в системе зависит не только от постоянной времени  $T$ , но и от коэффициента демпфирования  $d$ , поэтому для его приближенной оценки соотношением (5.32) можно пользоваться в случае, когда  $d$  изменяется в диапазоне  $0,5 \leq d \leq 1$ .

Выражение для корней характеристического уравнения системы

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 1}}{T}$$

позволяет определить колебательность  $\mu$  (при  $d < 1$ ) в виде

$$\mu = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d} = \mu(d),$$

а следовательно, и ее перерегулирование. При  $d \geq 1$  процессы в системе имеют аperiodический характер, при  $d = 0$  установятся незатухающие колебания.

Отметим, что коэффициент усиления  $k$ , как и в случае систем первого порядка, определяет установившееся значение переходных процессов. Однако их вид и длительность зависят не только от постоянной времени, но и от коэффициента демпфирования.

### 5.5.3. СИСТЕМА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Поведение системы третьего порядка описывает передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1}, \quad (5.34)$$

т. е. переходные процессы в ней определяют уже четыре параметра:  $k$ ,  $T$ ,  $A$  и  $B$ .

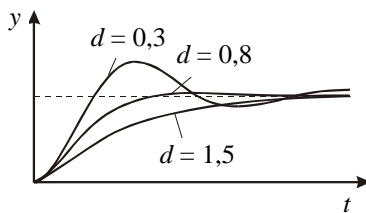


Рис. 5.25. Переходные процессы в системе второго порядка

Установившееся значение для выходной переменной соответствует выражению (5.31) и зависит только от коэффициента усиления  $k$ , инерционность процессов зависит от  $T$ , а колебательные свойства системы определяются параметрами  $A$  и  $B$ . Для исследования этой зависимости используется диаграмма И.А. Вышнеградского [6], полученная им в 1876 г. на основе характеристического уравнения

$$T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTP + 1 = 0. \quad (5.35)$$

Поскольку постоянная времени не влияет на колебательность процессов, перейдем к нормированному характеристическому уравнению заменой в (5.35) оператора  $p$  новым оператором  $q = Tp$ :

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0. \quad (5.36)$$

Параметры  $A$  и  $B$ , которые используются для описания системы третьего порядка, носят название **параметров Вышнеградского**. Кроме колебательности они определяют устойчивость системы, которая будет иметь место при выполнении условия  $AB > 1$ , что соответствует критерию Гурвица.

Введем в рассмотрение область значений параметров  $A$  и  $B$  (рис. 5.26) и нанесем границу устойчивости,  $AB = 1$ . Разобьем ее на подобласти с различным распределением корней характеристического уравнения (5.36), а следовательно, и видом процессов.

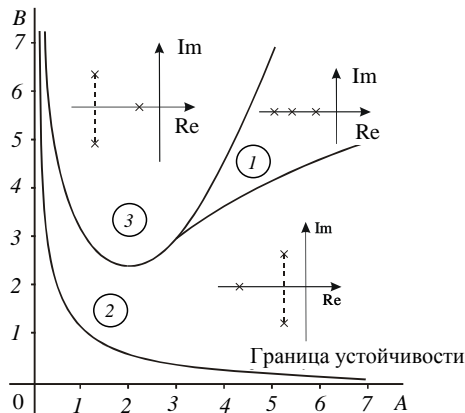


Рис. 5.26. Диаграмма Вышнеградского:  
1–3 – области распределения корней



Характерный вид переходных процессов, соответствующих каждой подобласти, показан на рис. 5.27.

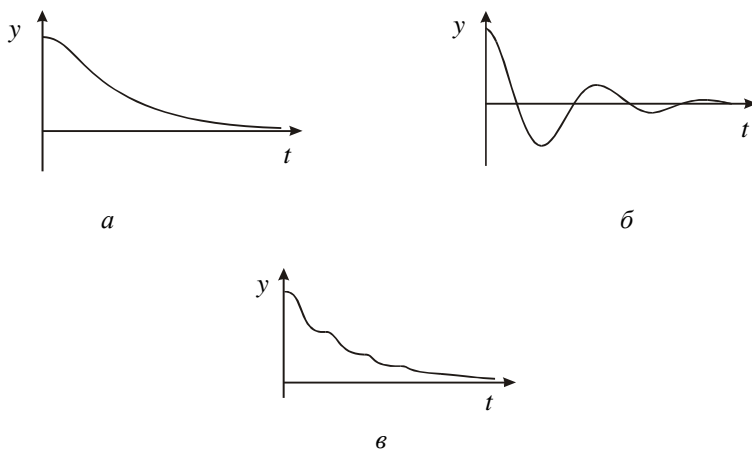


Рис. 5.27. Примеры процессов в системах:

*a* – с вещественными корнями; *б* – с доминирующей парой комплексных корней; *в* – с доминирующим вещественным корнем

Так как при всех значениях параметров  $A$  и  $B$  из области 1 корни характеристического уравнения (5.36) будут вещественными, то и процесс будет иметь аperiodический характер (рис. 5.27, *a*).

Если параметры  $A$  и  $B$  выбраны в области 2, где ближайшей к мнимой оси будет пара комплексно-сопряженных корней, то им соответствуют колебательные процессы (рис. 5.27, *б*). В случае, когда вещественный корень располагается ближе к мнимой оси, чем пара комплексно-сопряженных (область 3), колебательная составляющая затухает быстрее и процессы будут иметь вид, представленный на рис. 5.27, *в*.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе рассмотрены основные способы оценки вида переходных процессов по динамическим характеристикам систем. Точность анализа зависит не только от применяемых оценок, но и от точности составления математической модели.

Несмотря на то что с помощью современных пакетов прикладных программ для анализа и моделирования динамических систем можно на основе дифференциальных уравнений получить требуемые переходные характеристики, методы качественной оценки процессов не потеряли своей актуальности. Они позволяют сравнивать переходные процессы в различных системах, оценивать влияние параметров на их свойства, а также использовать при синтезе систем управления.

При исследовании свойств реальной системы решающее значение имеет эксперимент, в результате которого может возникнуть необходимость уточнения исходной математической модели.

Таким образом, только рациональное сочетание оценок по динамическим характеристикам, экспериментальных данных и прямого расчета переходного процесса средствами вычислительной техники дает надежный результат при проектировании реальных систем.

## ЗАДАЧИ

**5.1.** Определить полную статическую ошибку в системе, структурная схема которой имеет вид, показанный на рис. 5.28.

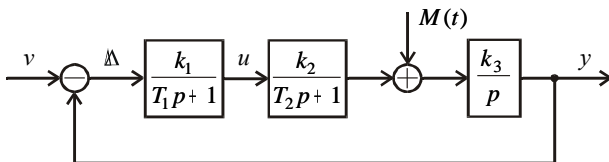


Рис. 5.28. Структурная схема системы к задаче 5.1

**5.2.** Определить относительную статическую и скоростную ошибки при  $v = 5t$  для системы, изображенной на рис. 5.29.

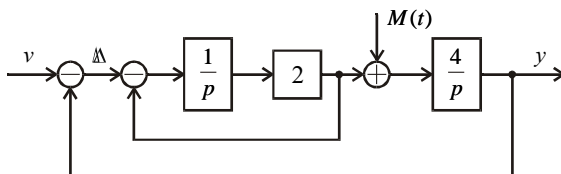


Рис. 5.29. Структурная схема системы к задаче 5.2

**5.3.** Определить полную статическую ошибку в системе (рис. 5.30) для следующих значений передаточной функции:

$$\text{а) } W_1(p) = \frac{2(0,5p+1)}{4p+1}, \quad W_2(p) = \frac{0,25}{0,02p^2 + 0,4p+1};$$

$$\text{б) } W_1(p) = \frac{25}{(2p+1)p}, \quad W_2(p) = \frac{1}{3p^2 + 4p+1};$$

$$\text{в) } W_1(p) = \frac{0,25p+1}{0,1p+1}, \quad W_2(p) = \frac{5}{(0,2p^2 + 0,1p+1)p}.$$

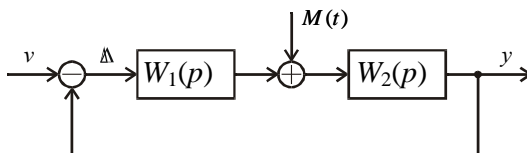


Рис. 5.30. Структурная схема системы к задаче 5.3

**5.4.** Определить скоростную ошибку системы фазовой автоподстройки частоты из примера 4.8, структурная схема которой показана на рис. 5.31. Значения параметров следующие:  $T_1 = 0,1$  с;  $T_2 = 0,04$  с;  $T_3 = 0,005$  с;  $K = k_1 k_2 k_3 = 200$  с<sup>-1</sup>.

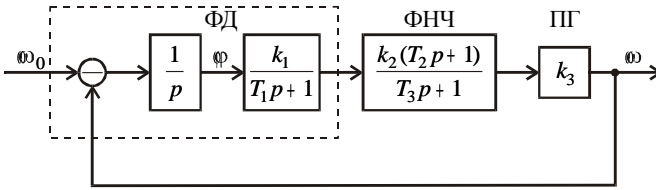


Рис. 5.31. Структурная схема системы к задаче 5.4

**5.5.** Для системы, структурная схема которой изображена на рис. 5.30, определить коэффициент усиления  $K_p$  так, чтобы статическая ошибка не превышала значения  $\Delta_*^0 = 5\%$  от  $M$  при трех значениях передаточных функций:

$$\text{а) } W_1(p) = \frac{K_p}{0,5p+1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{2p^2 + 0,7p+1};$$

$$\text{б) } W_1(p) = \frac{K_p(p+1)}{4p+1}, \quad W_2(p) = \frac{0,2p+1}{0,04p^2 + 0,5p+1};$$

$$\text{в) } W_1(p) = \frac{K_p}{10p+1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{(0,5p^2 + 0,3p+1)p}.$$

**5.6.** Оценить качество переходных процессов для объекта, модель которого имеет вид

$$W(p) = \frac{10}{4p^2 + p+1}.$$

**5.7.** Оценить качество переходных процессов по  $y$  для объекта, уравнения состояния которого:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2 + 15u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

**5.8.** Оценить длительность переходного процесса  $t_n$  корневым методом в замкнутой системе с единичной отрицательной обратной связью, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = \frac{5(p+1)}{(2p+1)(6p+1)}.$$

**5.9.** Оценить время переходного процесса в системе, структурная схема которой представлена на рис. 5.32.

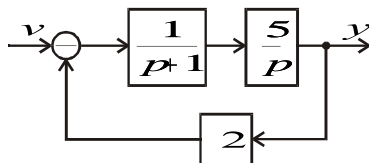


Рис. 5.32. Структурная схема системы к задаче 5.9

**5.10.** Оценить качество переходного процесса в системе, структурная схема которой представлена на рис. 5.33.

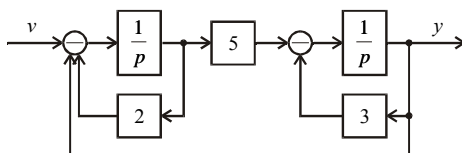


Рис. 5.33. Структурная схема системы к задаче 5.10

**5.11.** Оценить время переходного процесса и перерегулирование в системе, структурная схема которой показана на рис. 5.34.

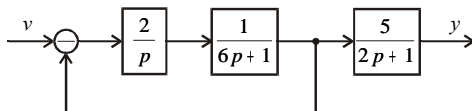


Рис. 5.34. Структурная схема системы к задаче 5.11

**5.12.** Оценить качество переходного процесса в системе, структурная схема которой представлена на рис. 5.35.

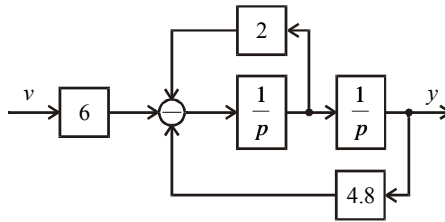


Рис. 5.35. Структурная схема системы к задаче 5.12

**5.13.** Определить коэффициент  $k$ , для которого относительная статическая ошибка системы по возмущению (рис. 5.36) не превышает 5%. Оценить качество переходного процесса при найденном значении коэффициента  $k$ , если передаточные функции имеют следующий вид:

$$\text{а) } W_1(p) = \frac{k}{3p+1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{p^2 + 0,7p+1};$$

$$\text{б) } W_1(p) = \frac{k}{0,5p+1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{0,1p^2 + 0,5p+1};$$

$$\text{в) } W_1(p) = \frac{k}{p+1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{(2p+1)p}.$$

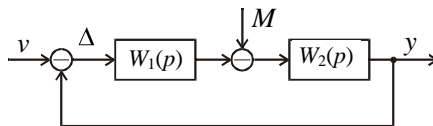


Рис. 5.36. Структурная схема системы к задаче 5.13

**5.14.** Определить коэффициент  $k$ , для которого скоростная ошибка по входному воздействию  $v$  системы (см. рис. 5.36) не превышает 2%.

Оценить время переходного процесса и перерегулирование при найденном значении коэффициента  $k$ , если

$$W_1(p) = \frac{k}{p}, \quad W_2(p) = \frac{1}{5p^2 + 4p + 1}.$$

**5.15.** Определить время переходного процесса, перерегулирование и изобразить качественный вид переходной характеристики системы, вещественная частотная характеристика которой показана на рис. 5.37.

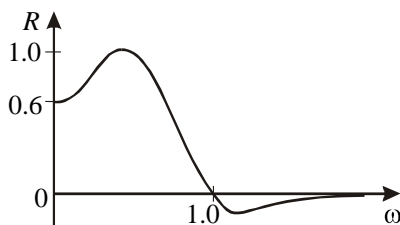


Рис. 5.37. Структурная схема системы к задаче 5.15

**5.16.** Оценить качество переходного процесса системы, вещественная частотная характеристика которой представлена на рис. 5.38.

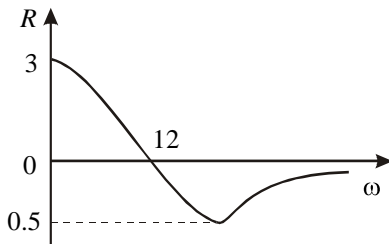


Рис. 5.38. Структурная схема системы к задаче 5.16

**5.17.** Используя частотный метод анализа показателей качества, вычислить время переходного процесса и перерегулирование для найденного значения  $k$  из задачи 5.13.

**5.18.** Определить коэффициент  $k$ , при котором относительная статическая ошибка системы (рис. 5.39) не превышает 1 %. Используя частотный метод анализа, вычислить показатели качества переходных процессов для найденного значения  $k$ .

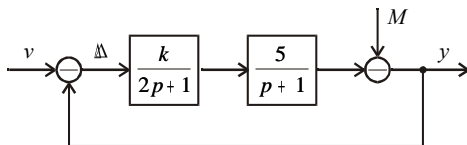


Рис. 5.39. Структурная схема системы к задаче 5.18

**5.19.** Оценить качество переходного процесса в системе управления двигателем постоянного тока из примера 5.3.



---

---

## Г л а в а 6

# СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

**П**роблема синтеза занимает центральное место в теории автоматического управления, так как наличие адекватных способов расчета определяет успех проектирования реальных систем управления. С момента зарождения автоматике как науки этой проблеме уделялось особое внимание: уже в первых работах Д. Максвелла и И.А. Вышнеградского предлагались рекомендации по выбору численных значений отдельных параметров регуляторов.

Однако регулярные методы синтеза появились вместе с применением частотных характеристик для исследования систем автоматического регулирования. В настоящее время частотный метод считается классическим и остается одним из основных при расчете линейных систем. Широкое применение этого метода и различных его модификаций обусловлено еще и тем, что он дает приемлемые результаты и при небольшом изменении параметров модели реального объекта.

Во второй половине XX века появились новые методы синтеза, которые принято называть современными. Некоторые из них основаны на использовании модальных (корневых) характеристик систем. Их результаты в большей степени зависят от ошибок в параметрах модели, чем частотные.

Частотные методы удобно использовать для режима отработки входных воздействий, а модальные – при проектировании систем, режим работы которых предполагает отработку возмущений и начальных условий.

### 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под **синтезом** будем понимать проектирование регулятора для системы автоматического управления по заданным требованиям к ее динамическим и статическим свойствам.

Выбор метода синтеза определяется технической ситуацией, поэтому целесообразно предварительно классифицировать режимы работы системы, модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv + M(t), & x \in R^n, \\ y = Cx, & v \in R^m, y \in R^m, M \in R^n. \end{cases} \quad (6.1)$$

Процессы в ней описываются соотношением

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bv(\tau)d\tau + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}M(\tau)d\tau \quad (6.2)$$

и определяются различными факторами: ненулевыми начальными условиями, входными воздействиями и возмущениями. Обычно в системе протекают смешанные процессы, однако для расчета регулятора их удобно различать, поэтому выделим основные режимы работы.

**Режимом отработки начальных условий** будем называть процесс перехода из произвольных начальных состояний  $x(0)$  в равновесные при отсутствии внешних воздействий на систему ( $v=0, M=0$ ) (рис. 6.1, а). Первую составляющую выражения (6.2), которая определяет этот режим работы, часто называют **свободной составляющей процесса**.

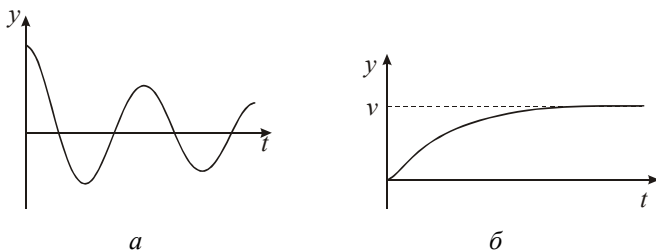


Рис. 6.1. Иллюстрация режимов отработки:

а – начальных условий; б – входа

**Режимом отработки входа** будем называть процесс отработки входного воздействия, когда  $v = \text{const}$ . Такому режиму работы соответствует вторая составляющая выражения (6.2).

**Режимом слежения за входом** будем называть процесс обработки изменяющегося входного воздействия  $v(t)$  при нулевых начальных условиях и отсутствии возмущений ( $y(t) \rightarrow v$ ,  $v = \text{var}$ ). Данному процессу также будет соответствовать вторая составляющая (6.2).

**Режимом обработки возмущений** будем называть процессы, вызванные в системе возмущением  $M(t)$  при фиксированных начальных условиях и  $v = \text{const}$ . Третья составляющая (6.2) отражает процесс обработки возмущения.

Выбор метода синтеза обусловлен режимом работы системы, причем требования к качеству процессов задаются в определенной форме на основе стандартных оценок: быстродействия, перерегулирования и статической ошибки.

При обработке входа для описания процессов обычно используются следующие динамические характеристики:  $h(t)$ ,  $g(t)$ ,  $W(p)$ ,  $W(j\omega)$ , которым соответствуют определенные методы синтеза. К настоящему времени наиболее полно разработан частотный метод, основанный на логарифмических частотных характеристиках  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . Если рассматривается режим обработки начальных условий и возмущений, то лучше применять модальный метод синтеза.

## 6.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Обсудим содержание задачи синтеза для одноканального объекта, представленного на рис. 6.2, где пунктиром выделен датчик. Поведение объекта описывает передаточная функция

$$W_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (6.3)$$

причем ресурс управления объекта ограничен,  $u \leq \bar{u}$ . Влияние окружающей среды отражает возмущающее воздействие  $M(t)$ , а выходная переменная измеряется датчиком (первичным измерительным преобразователем, сенсором) с помехой измерения  $H(t)$ , так что

$$\tilde{y} = y + H(t),$$

где  $\tilde{y}$  – измеренное значение выходной переменной  $y$ .

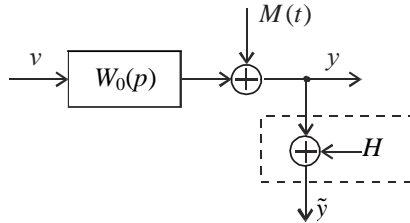


Рис. 6.2. Структурная схема одно-канального объекта

Целью функционирования замкнутой системы регулирования является обеспечение с заданной точностью  $\Delta_*^0$  свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v. \quad (6.4)$$

Наряду с условием статики (6.4) предъявляются требования и к динамике системы, т. е. характеру переходных процессов. Обычно они задаются в виде следующих оценок:

$$t_n \leq t_n^* \quad \text{и} \quad \sigma \leq \sigma^*, \quad (6.5)$$

выполнение которых представляет собой основную сложность расчета.

Необходимо определить структуру и параметры регулятора, обеспечивающего выполнение требований (6.4) и (6.5) в условиях действия возмущений и помех измерения.

Заметим, что переменной, которую можно использовать для организации управляющего воздействия в системе, является полученная с помощью датчика оценка выходной величины  $\tilde{y}$ . Поэтому в лучшем случае в системе с заданной точностью можно обеспечить выполнение свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = v,$$

а не условия (6.4). Для уменьшения влияния помехи при выборе измерительного устройства следует придерживаться рекомендаций:

- датчик должен обладать значительно большей точностью, чем требуемая точность системы в целом;
- нужно отфильтровывать помеху, частотный состав которой отличается от рабочих частот системы.

В соответствии с принципом суперпозиции ошибка регулирования в замкнутой системе будет представлять собой сумму трех составляющих

$$\Delta = v - y = \Delta_v + \Delta_H + \Delta_M.$$

Одна из них ( $\Delta_v$ ), порожденная входным воздействием, может быть легко скомпенсирована масштабированием (см. разд. 3). Поскольку помеха измерения  $H(t)$  обычно представляет собой высокочастотный сигнал, ее наибольшее влияние проявляется в динамике.

Следовательно, рассчитывать регулятор необходимо таким образом, чтобы в системе управления статическая ошибка, порожденная возмущением, не превышала заданного значения  $\Delta_M^0 \leq \Delta_*^0$ .

## 6.3. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Прежде чем выбирать подходящий метод расчета, необходимо убедиться в том, что задача синтеза будет разрешима. С этой целью необходимо исследовать свойства объекта управления и требования, которые предъявляются к качеству работы замкнутой системы. На их основе можно сформировать желаемую передаточную функцию

$$W_*(p) = \frac{y(p)}{v(p)} \quad (6.6)$$

и определить условия разрешимости задачи синтеза.

### 6.3.1. РЕСУРСНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ

Рассмотрим объект управления (6.3), полагая, что помеху измерения удалось исключить. В этом случае его операторное уравнение имеет вид

$$y(p) = M(p) + W_0(p)u(p). \quad (6.7)$$

Желаемое уравнение для замкнутой системы, соответствующее (6.6), запишем как

$$y(p) = W_*(p)v(p). \quad (6.8)$$

Приравнивая правые части выражений (6.7) и (6.8), определим «точное» управляющее воздействие

$$u(p) = W_0^{-1}(p)W_*(p)v(p) - W_0^{-1}(p)M(p). \quad (6.9)$$

Если удастся реализовать закон управления (6.9), то поведение замкнутой системы будет точно соответствовать желаемой передаточной функции (6.6).

Поскольку для реального объекта ресурс управления всегда ограничен, задача синтеза будет разрешима при выполнении *первого* условия

$$\bar{u} \geq W_0^{-1}(p)W_*(p)v(p) - W_0^{-1}(p)M(p), \quad (6.10)$$

которое и называется *ресурсным ограничением*.

К сожалению, на практике реализовать управление (6.9) невозможно, так как закон изменения возмущения  $M(t)$  неизвестен, кроме границ его изменения, которые и следует подставить для проверки в соотношение (6.10).

### 6.3.2. УСТОЙЧИВОСТЬ «ОБРАТНОГО» ОБЪЕКТА

Это условие также предполагает исследование свойств объекта. Изобразим структурную схему, соответствующую выражению для «точного» управляющего воздействия (6.9). Как видим из рис. 6.3, «точный» регулятор включает в себя желаемую передаточную функцию системы и обратную модель объекта. Поскольку  $W_*(p)$  всегда имеет полюса с отрицательной вещественной частью, то устойчивость «точного» регулятора определяется устойчивостью обратной модели объекта.

Отсюда следует *второе условие разрешимости*: задача синтеза будет иметь точное решение, если обратная модель объекта (6.3)  $W_0^{-1}(p)$  устойчива, что соответствует требованию

$$\operatorname{Re} \Lambda B(p) = 0 < 0. \quad (6.11)$$

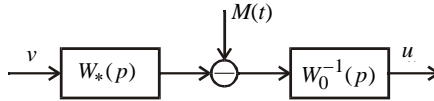


Рис. 6.3. Структурная интерпретация «точного» управления

Для разрешимости задачи синтеза необходимо, чтобы все «нули» передаточной функции объекта (корни полинома  $B(p)$ ) располагались в левой полуплоскости плоскости корней.

### ПРИМЕР 6.1

Рассмотрим проявление этого условия (рис. 6.4). На рисунке  $k$  – коэффициент усиления регулятора;  $W_0(p) = B(p)/A(p)$  – передаточная функция объекта управления.

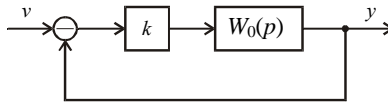


Рис. 6.4. Структурная схема системы к примеру 6.1

Запишем характеристическое уравнение системы

$$A(p) + kB(p) = 0.$$

Для уменьшения статической ошибки будем увеличивать коэффициент усиления регулятора. В пределе при  $k \rightarrow \infty$  получим вырожденную систему, характеристическое уравнение которой принимает вид

$$B(p) = 0,$$

и ее устойчивость определяют «нули» передаточной функции объекта. Такое «вырождение» справедливо, однако, при конечных, хотя и как угодно больших, значениях оператора  $p$ , и при полном исследовании характеристического уравнения нужно учитывать и «быстрые» корни.

Таким образом, (6.11) является необходимым условием устойчивости вырожденной системы и одновременно условием разрешимости задачи синтеза. Понятно, что для устойчивости замкнутой системы нужно анализировать все корни исходного характеристического уравнения.

### 6.3.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Понятие управляемости используется при проверке условий разрешимости задачи синтеза для линейных систем, поведение которых описывают уравнения состояния.

Рассмотрим условие управляемости для общего класса объектов вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m. \end{cases} \quad (6.12)$$

Объект (6.12) называется **управляемым**, если существует ограниченное управляющее воздействие  $u(t)$ , с помощью которого можно перевести его из начального состояния  $x(0)$  в заданное конечное  $x(T)$  за конечное время  $T$ .

Проверяется это условие с помощью **критерия управляемости**, его формулировку приведем без доказательства [2, 7]. Объект (6.12) будет управляем тогда и только тогда, когда матрица управляемости

$$U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (6.13)$$

имеет полный ранг.

Так как матрица  $U$  имеет  $n$  строк и  $n \times m$  столбцов, то критерий управляемости записывается в виде

$$r U = r B, AB, \dots, A^{n-1}B = n. \quad (6.14)$$

Определить, имеет ли матрица полный ранг, можно по соотношению

$$\det UU^T \neq 0, \quad (6.15)$$

которое легко проверить, например, с помощью пакета Matlab.

В случае одноканального объекта (когда  $m = 1$ ) матрица управляемости будет квадратной и критерий (6.14) принимает форму

$$\det U \neq 0. \quad (6.16)$$



Отметим, что задача синтеза будет иметь решение, если объект управляем, т.е. *условие управляемости* является условием разрешимости задачи синтеза.

Однако невыполнение условия (6.14) еще не означает, что такой объект нельзя стабилизировать. В случае, когда  $r \leq U < n$  и объект (6.12) не полностью управляем, с помощью специального невырожденного преобразования переменных

$$z = M_1 x, \quad \det M_1 \neq 0$$

его описание можно привести к канонической форме

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u, \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2, \\ y = C_1z_1 + C_2z_2. \end{cases} \quad (6.17)$$

Здесь переменные  $z_2$  характеризуют автономную часть объекта, называемую неуправляемой. Структурная схема такого объекта показана на рис. 6.5. Пунктиром выделена неуправляемая часть объекта, процессы в которой развиваются в силу собственных свойств. Изменить их с помощью управления невозможно, однако переменные  $z_2$  влияют на управляемую часть и выходные переменные  $y$ . Если неуправляемая часть будет неустойчива, то и весь объект будет не только неустойчивым, но и нестабилизируемым.

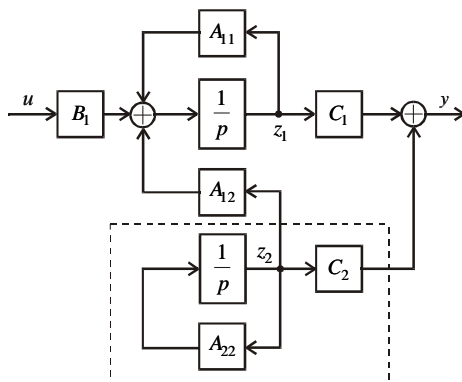


Рис. 6.5. Структурная схема не полностью управляемого объекта

Таким образом, для не полностью управляемого объекта условием разрешимости задачи синтеза является требование *устойчивости неуправляемой части*.

### ПРИМЕР 6.2

Проверить управляемость объекта, поведение которого описывает следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 - u, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3u. \end{cases}$$

Определим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Запишем матрицу управляемости в виде  $U = [B \quad AB \quad A^2B]$  и вычислим матрицы произведений

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу управляемости

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -15 \end{bmatrix}$$

и найдем ее определитель  $\det U = -33$ , следовательно, объект управляем.

### 6.3.4. НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Это понятие отражает возможность оценки переменных состояния объекта (6.12) по результатам измерения выходных переменных.

Объект называется **наблюдаемым**, если в любой момент времени можно оценить состояние  $x$  по данным измерения выходных переменных  $y(t)$  и управляющих воздействий  $u(t)$ .

Условие проверяется с помощью **критерия наблюдаемости**, который приводится без доказательства [2, 7]. Объект (6.12) наблюдаем тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

имеет полный ранг, т. е.

$$r N = n. \quad (6.19)$$

Это условие можно проверить по соотношению

$$\det N^T N \neq 0.$$

В случае одноканального объекта критерий наблюдаемости (6.19) принимает вид

$$\det N \neq 0. \quad (6.20)$$

Задача синтеза будет иметь решение, если объект наблюдаем, т. е. условие наблюдаемости также является условием разрешимости задачи синтеза.

В случае, когда  $r N < n$ , т. е. объект (6.12) не полностью наблюдаем, существует невырожденное преобразование переменных

$$z = M_2 x, \quad \det M_2 \neq 0,$$

которое позволяет уравнения (6.12) записать в форме

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11} z_1 + B_1 u, \\ \dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u, \\ y = C_1 z_1. \end{cases} \quad (6.21)$$

Здесь переменные  $z_2$  характеризуют ненаблюдаемую часть объекта (рис. 6.6).

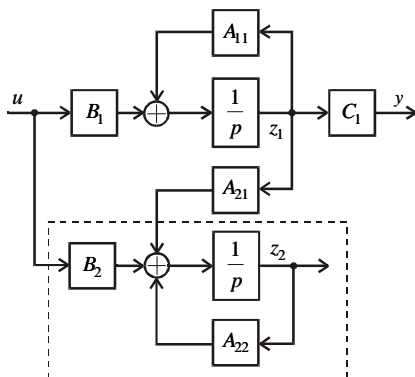


Рис. 6.6. Структурная схема не полностью наблюдаемого объекта

На схеме пунктиром выделена ненаблюдаемая часть. Если она неустойчива, то стабилизировать объект нельзя. Следовательно, в этом случае условие разрешимости задачи синтеза – *устойчивость ненаблюдаемой части* объекта.

### ПРИМЕР 6.3

Проверить наблюдаемость объекта управления «каретка–маятник», схематичная модель которого изображена на рис. 2.3. В примере 2.5 получены матрицы объекта в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4c & 0 & a_4c & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = -c \quad 0 \quad c \quad 0.$$

Составим матрицу наблюдаемости

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & c \\ -a_4c^2 & a_2c & a_4c^2 & 0 \\ 0 & -a_4c^2 + a_2^2c & 0 & a_4c^2 \end{bmatrix}$$

и определим ее детерминант. Так как  $\det N = 0$ , объект «каретка – маятник» является ненаблюдаемым.

### 6.3.5. О «ВЫРОЖДЕНИИ» ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

При получении передаточных функций реальных систем в числителе и знаменателе могут появиться одинаковые или близкие сомножители, например,

$$W(p) = \frac{B(p)D(p)}{A(p)D(p)}. \quad (6.22)$$

После сокращения этих сомножителей получим вырожденную передаточную функцию

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Система будет работоспособной только в том случае, если выполняется *условие разрешимости*: общие сомножители числителя и знаменателя имеют корни с отрицательной вещественной частью

$$\operatorname{Re} \Lambda D(p) = 0 < 0. \quad (6.23)$$

#### ПРИМЕР 6.4

Покажем, к чему приведет несоблюдение условия (6.23) для объекта, который состоит из трех параллельных каналов (рис. 6.7).

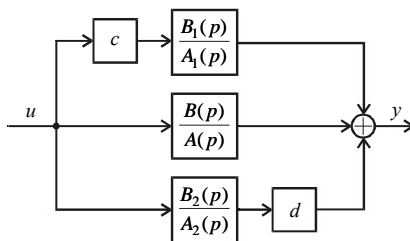


Рис. 6.7. Структурная интерпретация условия разрешимости

Определим для него передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} c + \frac{B(p)}{A(p)} + d \frac{B_2(p)}{A_2(p)},$$

которую представим в виде

$$W(p) = \frac{A(p)A_2(p)B_1(p)c + A_1(p)A_2(p)B(p) + dB_2(p)A_1(p)A(p)}{A_1(p)A(p)A_2(p)}. \quad (6.24)$$

Если здесь полагать  $c = 0$ , то получим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{A_1(p)A_2(p)B(p) + dB_2(p)A_1(p)A(p)}{A_1(p)A(p)A_2(p)},$$

где  $A_1(p)$  – общий сокращаемый множитель. При выполнении условия  $\operatorname{Re} \Lambda \quad A(p) = 0 < 0$  передаточная функция принимает вид

$$W(p) = \frac{A_2(p)B(p) + dB_2(p)A(p)}{A(p)A_2(p)}. \quad (6.25)$$

Наличие сокращаемого множителя в числителе и знаменателе (6.24) структурно означает появление *неуправляемой части*: при  $c = 0$  происходит разрыв связи и управление не действует на звено с передаточной функцией

$W_1(p) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)}$ , процессы в котором развиваются в силу собственных свойств.

При  $d = 0$  вместо (6.24) имеем

$$W(p) = \frac{A(p)A_2(p)B_1(p)c + A_1(p)A_2(p)B(p)}{A_1(p)A(p)A_2(p)},$$

где  $A_2(p)$  – общий сокращаемый множитель. При выполнении условия  $\operatorname{Re} \Lambda \quad A_2(p) = 0 < 0$  получим

$$W(p) = \frac{A(p)B_1(p)c + A_1(p)B(p)}{A_1(p)A(p)}. \quad (6.26)$$

Это соответствует наличию *ненаблюдаемой части* системы с передаточной функцией  $W(p) = \frac{B_2(p)}{A_2(p)}$ , которая не влияет на выход системы.

При неустойчивой неуправляемой или ненаблюдаемой части объекта замкнутая система окажется неработоспособной.

Данный пример иллюстрирует одну особенность одноканальных систем. Если ее поведение описывается передаточной функцией, то наличие неуправляемой или ненаблюдаемой части проявляется одинаково – в виде сокращаемых множителей в числителе и знаменателе.

В расчетной практике приведенные ранговые критерии разумно применять при проверке адекватности математической модели объекта его реальному поведению.

## 6.4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА

### 6.4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать объект управления, поведение которого описывает передаточная функция  $W_0(p)$ , а выходная переменная измеряется с помехой  $H(t)$  (см. рис. 6.2). Влияние окружающей среды отражает возмущение  $M(t)$ .

Требования к поведению замкнутой системы заданы в виде оценок переходного процесса, в качестве которых используются статическая ошибка ( $\Delta_*$ ), перерегулирование ( $\sigma^*$ ) и быстродействие ( $t_n^*$ ).

Необходимо определить передаточную функцию  $W_k(p)$  регулятора (корректирующего звена), включение которого в систему обеспечит в ней заданное качество работы.

Частотный метод синтеза предполагает использование асимптотических логарифмических амплитудных частотных характеристик, он применяется для расчета одноканальных систем, функционирующих в режиме слежения или обработки входного воздействия. Предполагается, что корректирующее звено (регулятор) находится на входе объекта. Расчетная структурная схема системы имеет вид, изображенный на рис. 6.8.

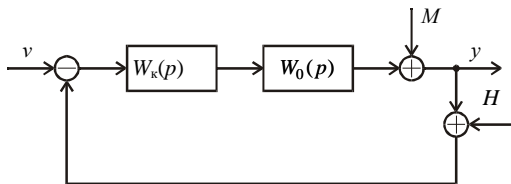


Рис. 6.8. Расчетная структурная схема системы

Рассмотрим реакцию системы только на входное воздействие  $v$ , полагая возмущение и помеху равными нулю ( $M = 0, H = 0$ ), их влияние учтем в дальнейшем. Определим сначала передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_p(p) = W_k(p) W_0(p), \quad (6.27)$$

а затем замкнутой

$$W(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}. \quad (6.28)$$

Как видим, передаточную функцию замкнутой системы однозначно определяет  $W_p(p)$ .

Таким образом, если удастся сформировать определенную передаточную функцию или частотную характеристику для разомкнутой системы, то тем самым можно обеспечить требуемые свойства в замкнутой системе.

#### 6.4.2. ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ НА СВОЙСТВА ЗАМКНУТОЙ

Рассмотрим подробнее связь между частотными характеристиками разомкнутой и замкнутой систем, для чего от передаточной функции (6.27) перейдем к частотной характеристике

$$W_p(j\omega) = W_k(j\omega) W_0(j\omega). \quad (6.29)$$

Исследуем характеристику (6.29) в различных областях частот, как это принято в инженерной практике. Введем предварительно несколько определений.

**Зоной низких частот** будем называть область изменения  $\omega$  вблизи нуля. В ней по условию статики выполняется соотношение

$$W_0(0) = k_0,$$

где  $k_0$  – коэффициент усиления объекта. Обычно  $k \gg 1$ , поэтому для разомкнутой системы в соответствии с (6.29) получим



$$|W_p(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \gg 1. \quad (6.30)$$

**Областью высоких частот** будем называть совокупность частот, намного превышающих полосу пропускания системы. Здесь справедливы соотношения

$$|W_0(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \approx 0, \quad |W_p(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \approx 0. \quad (6.31)$$

Под **зоной средних частот** будем понимать промежуток между зонами низких и высоких частот, где выполняются соотношения

$$|W_0(j\omega)| \approx 1, \quad |W_p(j\omega)| \approx 1. \quad (6.32)$$

Поскольку частотные характеристики разомкнутой и замкнутой систем связаны соотношением, аналогичным (6.28), с учетом (6.30) в области низких частот (НЧ) получим

$$|W(j\omega)| = \frac{|W_p(j\omega)|}{1 + |W_p(j\omega)|} \approx 1,$$

т. е. частотная характеристика разомкнутой системы практически не влияет на аналогичную характеристику замкнутой системы.

В области высоких частот (ВЧ) с учетом (6.31) справедливо соотношение

$$|W(j\omega)| = \frac{|W_p(j\omega)|}{1 + |W_p(j\omega)|} \approx 0,$$

а следовательно, частотная характеристика разомкнутой системы также не влияет на свойства замкнутой.

Таким образом, наибольшее влияние разомкнутая система оказывает на свойства замкнутой в области средних частот (СЧ), где необходимо особенно тщательно формировать частотную характеристику  $W_p(j\omega)$ .

### 6.4.3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЧАСТОТНОГО МЕТОДА СИНТЕЗА

На основе выражения (6.29) получим расчетные соотношения частотного метода синтеза. Если удастся задать определенную частотную характеристику разомкнутой системы  $W_p^*(j\omega)$ , то из (6.29) можно вычислить  $W_k(j\omega)$ . Однако этот способ громоздок и не нашел практического применения, но на его основе разработан удобный метод синтеза по ЛАЧХ. Запишем его расчетное соотношение, для чего частотную характеристику разомкнутой системы представим в форме

$$W_p(j\omega) = A_p(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

В соответствии с (6.29) для амплитудных частотных характеристик справедливо равенство

$$A_p(\omega) = A_k(\omega)A_0(\omega),$$

которое в логарифмическом масштабе принимает вид

$$L_p(\omega) = L_k(\omega) + L_0(\omega). \quad (6.33)$$

Приравняв правую часть (6.33)  $L_*(p)$ , получим

$$L_*(\omega) = L_k(\omega) + L_0(\omega).$$

Отсюда следует расчетное соотношение для логарифмической характеристики регулятора, которое является основным в частотном методе синтеза

$$L_k(\omega) = L_*(\omega) - L_0(\omega). \quad (6.34)$$

Таким образом, для расчета регулятора необходимо построить логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ) объекта и на основе требований к качеству процессов в замкнутой системе сформировать ЛАЧХ разомкнутой системы. Затем следует определить ЛАЧХ регулятора в соответствии с выражением (6.34).

### 6.4.4. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЛАЧХ ОБЪЕКТА

Часто модель объекта управления представляет собой последовательную цепочку типовых звеньев, поэтому  $L_0(\omega)$  можно получить, суммируя отдельные ЛАЧХ. Подобное суммирование позволяет предложить следующую процедуру построения  $L_0(\omega)$ .

- На частоте  $\omega = 1$  (или в логарифмическом масштабе  $\lg \omega = 0$ ) фиксируется точка, соответствующая значению  $20 \lg k_0$ , где  $k_0$  – коэффициент усиления объекта.

- На оси абсцисс отмечаются частоты сопряжения  $\omega_i = T_i^{-1}$  (или  $\lg \omega_i = \lg T_i^{-1}$ ),  $i = \overline{1, n}$ , где  $n$  – число типовых звеньев в составе передаточной функции объекта.

- До первой частоты сопряжения строится низкочастотная асимптота с наклоном  $-20$  дБ/дек., если  $W_0(p)$  содержит интегрирующие звенья, а  $r$  – число таких звеньев. Наклон характеристики будет равен  $+20$  дБ/дек., если передаточная функция объекта содержит дифференцирующие звенья,  $l$  – число этих звеньев. Низкочастотная асимптота строится таким образом, чтобы она сама или ее продолжение проходили через точку  $20 \lg k_0$ .

- На частотах сопряжения происходит «излом» асимптотической ЛАЧХ объекта. Наклон ЛАЧХ изменяется на  $-20$  дБ/дек., если соответствующая частоте сопряжения постоянная времени находится в знаменателе передаточной функции объекта,  $r$  – число таких звеньев. «Излом» асимптотической ЛАЧХ будет равен  $+20$  дБ/дек., если постоянная времени находится в числителе передаточной функции,  $l$  – число звеньев. Новая асимптота проводится до следующей частоты сопряжения, где также происходит ее «излом» в соответствии с указанным правилом.

#### ПРИМЕР 6.5

Построить асимптотическую ЛАЧХ объекта, передаточная функция которого имеет вид

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где коэффициент усиления  $k_0 = 10$ , а постоянные времени  $T_1 = 10$  с,  $T_2 = 1$  с.

Используем предложенную процедуру для построения ЛАЧХ объекта. Предварительно определим характерные точки:

$$20 \lg k_0 = 20 \text{ дБ};$$

$$\lg \omega_1 = \lg 1/T_1 = \lg 0,1 = -1 \text{ дек.};$$

$$\lg \omega_2 = \lg 1/T_2 = \lg 1 = 0,$$

отметим их на осях координат (рис. 6.9).

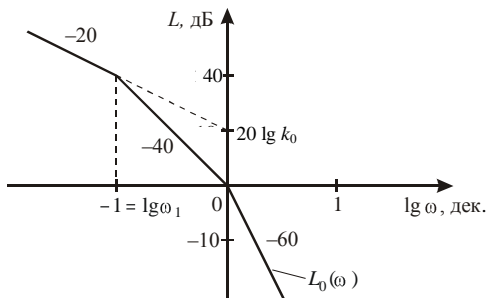


Рис. 6.9. Асимптотическая ЛАЧХ объекта для примера 6.5

Построение ЛАЧХ начинается из области низких частот, которая расположена левее первой частоты сопряжения. Низкочастотная асимптота имеет наклон  $-20$  дБ/дек., так как передаточная функция объекта содержит интегрирующее звено. Проводится она до частоты  $\lg \omega_1$  так, чтобы ее продолжение пересекало ось ординат в точке  $20 \lg k_0$ . На частоте  $\lg \omega_1$  происходит «излом» характеристики на  $-20$  дБ/дек., что соответствует аperiodическому звену в составе  $W_0(p)$ . До следующей частоты сопряжения ( $\lg \omega_2$ ) асимптота имеет наклон  $-40$  дБ/дек. «Излом» характеристики на частоте  $\lg \omega_2$  равен  $-20$  дБ/дек., так как в составе  $W_0(p)$  есть аperiodическое звено с постоянной времени  $T_2$ . Следовательно, наклон последней асимптоты ЛАЧХ объекта будет равен  $-60$  дБ/дек.

Для построения ЛАЧХ объекта с произвольной передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

следует перейти к выражению для частотной характеристики

$$W_0(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика определяется так:

$$A_0(\omega) = \frac{A_B(\omega)}{A_A(\omega)},$$

что позволяет вычислить

$$L_0(\omega) = L_B(\omega) - L_A(\omega). \quad (6.35)$$

Таким образом, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика объекта находится как разность (6.35).

### 6.4.5. ПОСТРОЕНИЕ ЖЕЛАЕМОЙ ЛАЧХ

Поскольку желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика  $L_*(\omega)$  строится на основе требований к качеству работы замкнутой системы в статике и динамике, рассмотрим эти режимы отдельно.

Так как в основном статическую ошибку в системе (см. рис. 6.9) порождает возмущающее воздействие (см. главу 5), то необходимо обеспечить выполнение условия

$$\left| \Delta_M^0 \right| \leq \Delta_*^0, \quad (6.36)$$

где  $\Delta_*^0 = \delta_*^0 |M|$  – величина максимально допустимой статической ошибки;  $\delta_*^0$  – ее относительное значение;  $\Delta_M^0$  – действительная статическая ошибка в системе от возмущения.

Известно, что на величину статической ошибки влияет общий коэффициент усиления  $k_p$ , который равен произведению коэффициентов усиления объекта и регулятора  $k_p = k_0 k_k$ . В случае статической системы ошибка  $\Delta_M^0$  соответствует выражению (5.15), т. е.

$$\Delta_M^0 = -\frac{1}{1 + k_0 k_k} M.$$

С учетом требования (6.36) расчетное соотношение для  $k_p$  принимает вид

$$\frac{1}{1 + k_p} \leq \delta_*. \quad (6.37)$$

Для астатических систем, работающих в режиме линейной заводки, коэффициент усиления  $k_p$  можно определить на основе выражения (5.19).

При синтезе систем частотным методом ЛАЧХ объекта и ЛАЧХ разомкнутой системы удобно «выровнять» по коэффициенту и строить  $\tilde{L}_0(\omega)$  с коэффициентом усиления  $k_p$ . Таким образом, требование по статике учитывается на этапе построения логарифмической характеристики объекта.

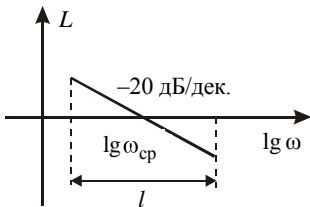


Рис. 6.10. Среднечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ

Обсудим теперь построение желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы, которую будем выбирать из условий требуемой динамики замкнутой системы. Так как наибольшее влияние на свойства замкнутой системы разомкнутая оказывает в области средних частот (см. подразд. 6.4.2), построение желаемой характеристики начинается именно в этой области частот (рис. 6.10).

Опытным путем установлено, что для обеспечения заданных динамических свойств наклон среднечастотной асимптоты  $L_*(\omega)$  следует выбирать равным  $-20$  дБ/дек., причем ось абсцисс она пересекает в точке  $\lg \omega_{ср}$ . Частота среза  $\omega_{ср}$  в данном методе играет роль гранич-

ной частоты полосы пропускания, при этом значение АЧХ системы становится равным единице.

Выбирается  $\omega_{\text{ср}}$  по заданному быстродействию и перерегулированию замкнутой системы, а соотношение между  $t_n^*$  и  $\omega_{\text{ср}}$  устанавливаются номограммы, приводимые в справочной литературе [6, 39, 40]. Для предварительных расчетов можно пользоваться выражением

$$\omega_{\text{ср}} \cong \frac{k\pi}{t_n^*}, \quad (6.38)$$

где  $k = (2 \dots 4)$  и зависит от величины заданного перерегулирования.

Длина среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ ограничивается запасом устойчивости по модулю  $\Delta L$ , который откладывается вверх и вниз по оси ординат. В свою очередь  $\Delta L$  находится по номограммам в зависимости от требуемого перерегулирования  $\sigma^*$ .

Приблизительно длина среднечастотного участка  $l = (1 \dots 1,5)$  декады, причем вправо и влево от  $\lg \omega_{\text{ср}}$  длина асимптоты составляет  $0,5l$ . В этом случае в системе будет обеспечено перерегулирование  $\sigma \cong (20 \dots 30) \%$ .

Далее переходим к построению желаемой характеристики в области высоких и низких частот. Поскольку  $\tilde{L}_0(\omega)$  строится с учетом рассчитанного из условий статики коэффициента усиления  $k_p$ , для требуемой статической ошибки следует обеспечить совпадение в области низких частот  $L_*(\omega)$  с ЛАЧХ объекта. В области высоких частот эти две характеристики могут совпадать или быть параллельными. Далее среднечастотная часть совмещается с низкочастотной и высокочастотной асимптотами желаемой ЛАЧХ. Наклон ЛАЧХ на участках сопряжения должен быть кратным 20 дБ/дек., их следует проводить так, чтобы получить наиболее простую характеристику  $\tilde{L}_k(\omega)$ .

### 6.4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РЕГУЛЯТОРА

Асимптотическую ЛАЧХ регулятора найдем графически в соответствии с основным соотношением частотного метода синтеза (6.34) в виде

$$\tilde{L}_k(\omega) = L_*(\omega) - \tilde{L}_0(\omega).$$

По полученной характеристике определим частоты сопряжения, где происходит излом  $\tilde{L}_k(\omega)$ , и соответствующие им значения постоянных времени. Передаточная функция  $\tilde{W}_k(p)$  определяется на основе процедуры, обратной по отношению к правилу построения ЛАЧХ объекта. Причем в окончательную передаточную функцию регулятора следует добавить коэффициент усиления  $k_k = k_p/k_0$ , рассчитанный по условиям статики, т. е.  $W_k(p) = k_k \tilde{W}_k(p)$ .

Реализовать полученную передаточную функцию можно на пассивных или активных элементах. В последнем случае удобно воспользоваться рекомендациями разд. 3.6 по переходу от передаточной функции к структурным схемам, соответствующим каноническому представлению. Отметим, что в этом методе синтеза для реализации регулятора можно использовать любой из вариантов структурных схем.

#### ПРИМЕР 6.6

Для системы, приведенной на рис. 6.8, с передаточной функцией объекта

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

и построенной по заданным требованиям к динамике и статике логарифмической характеристикой  $L_*(\omega)$  (рис. 6.11), необходимо определить передаточную функцию регулятора.

Предварительно графически найдем  $L_k(\omega)$  как разность между желаемой характеристикой  $L_*(\omega)$  системы и ЛАЧХ объекта  $L_0(\omega)$ . Определим частоты сопряжения  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , которые соответствуют точкам излома



характеристики корректирующего звена  $L_K(\omega)$ . Используя правило подразд. 6.4.3, запишем передаточную функцию регулятора в виде

$$W_K(p) = \frac{(T_3 p + 1)(T_1 p + 1)}{(T_4 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где  $T_i = 1/\omega_i$ .

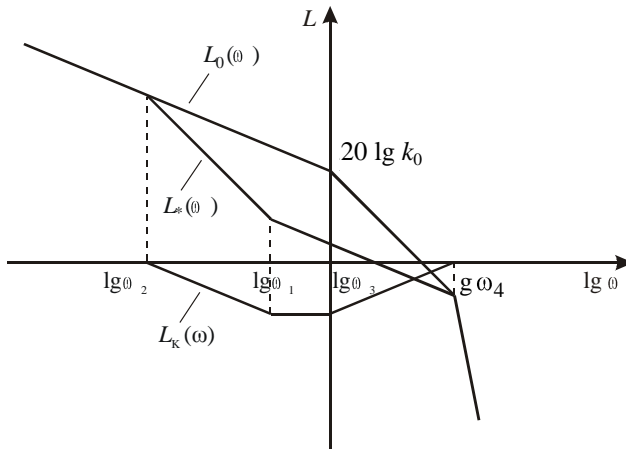


Рис. 6.11. Иллюстрация частотного метода синтеза

Схематично полученную передаточную функцию можно представить в виде цепочки последовательно соединенных интеграторов с прямыми и обратными связями, используя приемы, описанные в разд. 3.6. Такое представление позволяет легко перейти к реализации корректирующего звена на активных элементах.

### 6.4.7. ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ПОМЕХИ ИЗМЕРЕНИЯ НА СВОЙСТВА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Обсудим теперь влияние возмущения и помехозащищенность системы (рис. 6.12), рассчитанной частотным методом, для чего вернемся к ее исходной структуре (см. рис. 6.8).

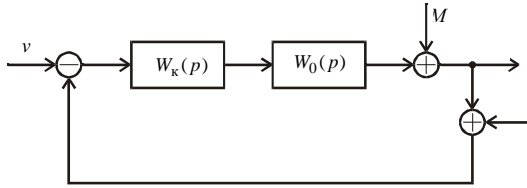


Рис. 6.12. Расчетная структурная схема системы для частотного метода синтеза

Рассмотрим сначала случай, когда помеха измерения пренебрежимо мала ( $H = 0$ ). Запишем выражение для выходной переменной системы

$$y = \frac{W_k(p)W_0(p)}{1 + W_k(p)W_0(p)} v - \frac{1}{1 + W_k(p)W_0(p)} M. \quad (6.39)$$

В соответствии с постановкой задачи синтеза необходимо, чтобы выходная переменная  $y$  повторяла входной сигнал  $v$  независимо от влияния возмущения  $M$ . Обсудим, как система справляется с этой задачей, для чего исследуем ее поведение на различных частотах.

В области низких частот в соответствии с (6.30) справедливо условие  $|W_k(j\omega)W_0(j\omega)| \gg 1$ , поэтому вторая составляющая выражения (6.39) при замене  $p$  на  $j\omega$  обращается в нуль, а  $y \approx v$ . Таким образом, система на низких частотах достаточно хорошо выполняет свою функцию.

Вблизи частоты среза (в области средних частот) согласно (6.32) справедливо соотношение  $|W_k(j\omega)W_0(j\omega)| \approx 1$ , а составляющие выхода следующие:  $y = 0,5v$  и  $y_M = 0,5M$ . Очевидно, что в такой ситуации система плохо воспроизводит вход и плохо подавляет возмущение, т. е. работает «частично».

В области высоких частот для частотных характеристик справедливо соотношение (6.31), поэтому вместо выражения (6.39) получим  $y_v \approx 0$  и  $y_M \approx M$ . Как видим, в этом случае система не справляется с поставленной задачей.

Следовательно, чем шире полоса пропускания (чем больше  $\omega_{cp}$ ), тем лучше в условиях действия возмущений система выполняет свое назначение. При построении желаемой логарифмической характеристики разомкнутой системы необходимо учитывать этот факт и стремиться по возможности увеличивать  $\omega_{cp}$ .

Обсудим теперь влияние помехи  $H$ , полагая входное воздействие  $v$  и возмущение  $M$  равными нулю. Поскольку объект, как правило, имеет ограниченную полосу пропускания и в этом случае выступает в роли фильтра, высокочастотная помеха не будет проходить на выход системы. В основном помеха влияет на управляющее воздействие, для которого операторное выражение имеет вид

$$u = -\frac{W_k(p)}{1 + W_k(p)W_0(p)} H. \quad (6.40)$$

Рассмотрим соответствующую частотную характеристику и запишем приближенные выражения для управления (6.40) на различных частотах.

В области низких частот, когда  $|W_k(j\omega)W_0(j\omega)| \gg 1$ , получим

$$u \cong -\frac{1}{k_0} H.$$

Как видим, влияние помехи будет тем меньше, чем больше коэффициент усиления объекта.

Для области средних частот справедливо условие  $|W_k(j\omega)W_0(j\omega)| \approx 1$ , при этом

$$u \cong -0,5 H,$$

т. е. влияние помехи повышается по сравнению с предыдущим случаем.

В области высоких частот при выполнении соотношения (6.31) составляющую управления, порожденную помехой, приближенно можно оценить:

$$u \cong W_k(j\omega)H.$$

Таким образом, в этом случае влияние помехи почти полностью определяется свойствами корректирующего звена.

Следовательно, для уменьшения влияния помехи на низких и средних частотах нужно применять «качественный» датчик, а на высоких частотах помеху можно подавить путем использования регулятора, обладающего интегрирующими свойствами. Подобный эффект будет наблюдаться, если степень полинома числителя передаточной функции  $W_k(p)$  меньше степени полинома ее знаменателя. В случае, когда степени полиномов  $A_k(p)$  и  $B_k(p)$  равны, в регулятор рекомендуется добавить апериодическое звено с малой постоянной времени.

### 6.4.8. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА ЧАСТОТНЫМ МЕТОДОМ

Обобщая рассмотренные этапы частотного метода синтеза, можно предложить следующую процедуру расчета регулятора.

1. Определяется коэффициент усиления разомкнутой системы  $k_p$  из условия заданной статической ошибки  $\Delta_*^0$  по соотношению (6.36), а затем вычисляется коэффициент усиления регулятора (корректирующего звена)  $k_k = k_p/k_0$ .

2. Строится асимптотическая логарифмическая амплитудная частотная характеристика объекта с учетом рассчитанного коэффициента усиления регулятора  $k_k$ , т. е.  $\tilde{L}_0(\omega) = k_k L_0(\omega)$ .

3. На основании требований к качеству процессов в замкнутой системе ( $t_n^*$  и  $\sigma^*$ ) формируется желаемая ЛАЧХ разомкнутой системы  $L_*(\omega)$ .

4. Графически вычисляется логарифмическая амплитудная частотная характеристика регулятора согласно соотношению  $\tilde{L}_k(\omega) = L_*(\omega) - \tilde{L}_0(\omega)$ .

5. В соответствии с правилом подразд. 6.4.3 на основе  $\tilde{L}_k(\omega)$  восстанавливается передаточная функция  $\tilde{W}_k(p)$ , а затем записывается передаточная функция регулятора  $W_k(p) = k_k \tilde{W}_k(p)$ .

6. Анализируется влияние возмущения  $M(t)$  и в случае необходимости увеличивается частота среза  $\omega_{cp}$ , для которой повторяются пп. 3–5.

7. Для уменьшения влияния помехи измерения к рассчитанной передаточной функции  $W_k(p)$  корректирующего звена добавляется передаточная функция аperiodического звена с малой постоянной времени.

8. Предлагается схемная реализация регулятора на активных или пассивных элементах.

### 6.4.9. О ВЛИЯНИИ СОКРАЩАЕМЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Здесь мы вернемся к обсуждению эффектов, к которым может привести пренебрежение одинаковыми или близкими по численным значениям сомножителями в числителе и знаменателе передаточной функции разомкнутой системы. В подразд. 6.3.5 была рассмотрена связь этого факта со свойствами управляемости и наблюдаемости. Обсудим теперь возможные последствия такого пренебрежения в процедуре частотного метода.

Пусть снова передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (6.22). При построении ЛАЧХ «близкие» сомножители практически не изменяют вид характеристик и, следовательно, вид переходных процессов при обработке задающих воздействий с нулевыми начальными условиями. Однако в замкнутой системе эти сомножители соответствуют определенной группе корней, что следует из характеристического уравнения

$$A(p) \cdot D(p) + B(p) \cdot D(p) = [A(p) + B(p)] \cdot D(p) = 0.$$

Как видно, уравнение  $D(p) = 0$  порождает свои составляющие движения при соответствующих начальных условиях, что требует отдельного анализа корней этого уравнения. Они должны соответствовать принятому для системы запасу устойчивости. Реальная система обрабатывает и задающие воздействия и случайные возмущения, и конструктор должен гарантировать успешную работу при всех возможных режимах.

#### ПРИМЕР 6.7

Для следящей системы управления одним из звеньев руки робота из примера 5.2 (рис. 6.13) рассчитать регулятор, который обеспечивал бы следующее качество процессов: время установления  $t_n \leq 2$  с, перерегулирование  $\sigma \leq 30\%$ , скоростная ошибка  $\delta_{ск} \leq 2,5\%$ .

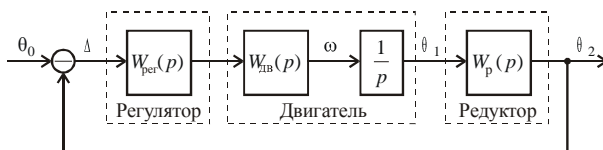


Рис. 6.13. Структурная схема системы управления одним из звеньев руки робота

На рис. 6.13 приняты следующие обозначения:

$W_{\text{дв}}(p) = \frac{4,5}{(p+1)(p+5)}$  и  $W_p(p) = \frac{1}{30}$  – передаточные функции двигателя и редуктора;  $W_{\text{рег}}(p) = W_k(p)W_{\text{УМ}}(p)$  – передаточная функция регулятора, который включает в себя корректирующее звено  $W_k(p)$  и усилитель мощности с передаточной функцией  $W_{\text{УМ}}(p) = k_{\text{УМ}} = 30$ .

При расчете  $W_k(p)$  коэффициент усиления усилителя мощности  $k_{\text{УМ}}$  добавим к передаточной функции объекта, т. е. будем рассматривать

$$W_0(p) = k_{\text{УМ}}W_{\text{дв}}(p)W_p(p) = \frac{4,5}{p(p+1)(p+5)}.$$

В соответствии с процедурой синтеза определим коэффициент усиления корректирующего звена из условия заданной скоростной ошибки (см. пример 5.2):

$$\delta^0 = \frac{1}{W_{\text{рег}}(0)W_{\text{дв}}(0)W_p(0)} \leq \delta_*^0.$$

С учетом численных значений получим  $1/0,9k_k \leq 0,025$  и  $k_k \geq 45$ . Выберем отсюда  $k_k = 50$ .

Для построения асимптотической ЛАЧХ  $\tilde{L}_0(\omega)$  запишем  $\tilde{W}_0(p)$  в виде

$$\tilde{W}_0(p) = k_k W_0(p) = \frac{45}{p(p+1)(0,2p+1)}$$

и определим следующие характерные точки:  $20 \lg k = 20 \lg 45 = 33$  дБ;  $\omega_1 = 1/T_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 1/T_2 = 5 \text{ с}^{-1}$ . В логарифмическом масштабе  $\lg \omega_1 = 0$ ,  $\lg \omega_2 = 0,7$  дек. Асимптотическая ЛАЧХ  $\tilde{L}_0(\omega)$  приведена на рис. 6.14.

Построим теперь желаемую ЛАЧХ, среднечастотный участок которой имеет наклон  $-20$  дБ/дек. Исходя из заданного перерегулирования  $\sigma^* \leq 30\%$ , по номограммам [6] (рис. 6.15) определим  $P_{\text{max}} = 1,22$  и  $\omega_n = 4\pi/t_n^* \approx 6,5 \text{ с}^{-1}$ . Частоту среза обычно находят по соотношению  $\omega_{\text{ср}} = (0,6 \dots 0,9)\omega_n$ , поэтому выберем  $\omega_{\text{ср}} = 5 \text{ с}^{-1}$ . В этом случае  $\lg \omega_{\text{ср}} = 0,7$  дек. Запас устойчивости по модулю, ограничивающий среднечастотный участок ЛАЧХ, также определим по номограмме,  $\Delta L = 16$  дБ. В результате получим  $L_*(\omega)$ , которая приведена на рис. 6.14.

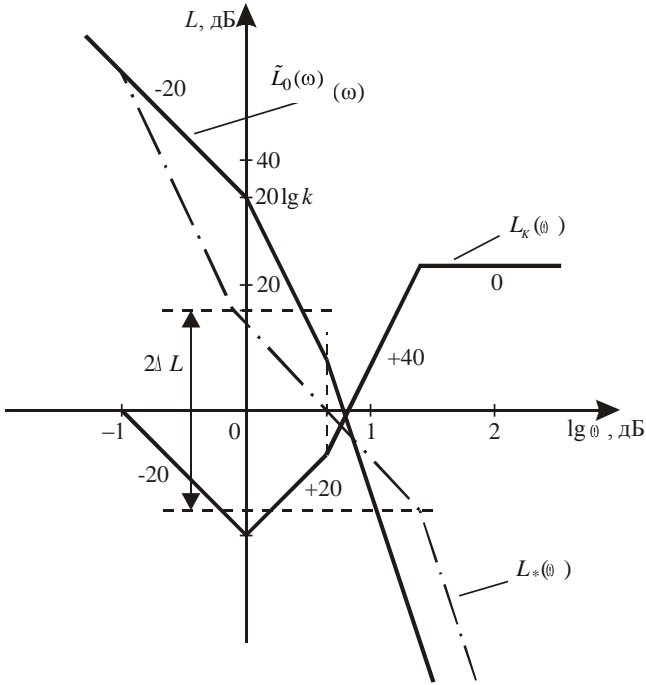


Рис. 6.14. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики к примеру 6.7

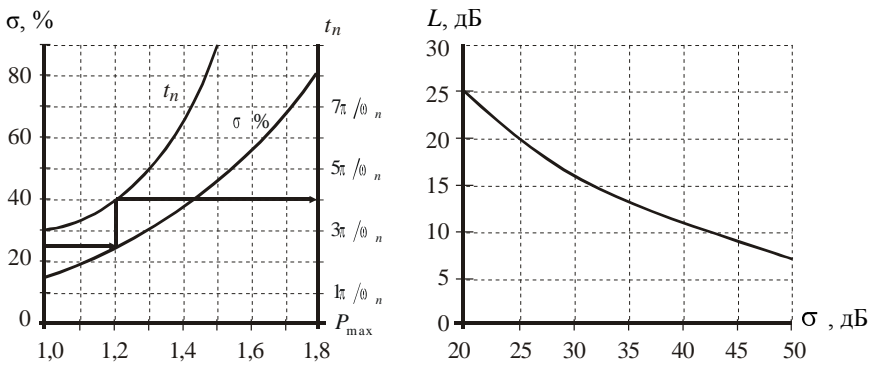


Рис. 6.15. Номограммы для определения параметров желаемой ЛАЧХ

Определим теперь  $\tilde{L}_k(\omega)$  и запишем

$$\tilde{W}_k(p) = \frac{\tau_2^2 p^2 + \tau_2 p + 1}{\tau_1 p + 1} \frac{\tau_3 p + 1}{\tau_4^2 p^2 + \tau_4 p + 1},$$

где  $\lg \frac{1}{\tau_1} = -1$ ;  $\lg \frac{1}{\tau_2} = 0$ ;  $\lg \frac{1}{\tau_3} = 0,7$ ;  $\lg \frac{1}{\tau_4} = 1,5$ . Отсюда следует, что  $\tau_1 = 10$  с,  $\tau_2 = 1$  с,  $\tau_3 = 0,2$  с,  $\tau_4 = 0,03$  с. Окончательно запишем

$$W_k(p) = k_k \tilde{W}_k(p) = 50 \frac{(p^2 + p + 1)(0,2p + 1)}{(10p + 1)(0,0009p^2 + 0,03p + 1)},$$

или

$$W_k(p) = 5556 \frac{0,2p^3 + 1,2p^2 + 1,2p + 1}{p^3 + 33,4p^2 + 1114,4p + 111,1}.$$

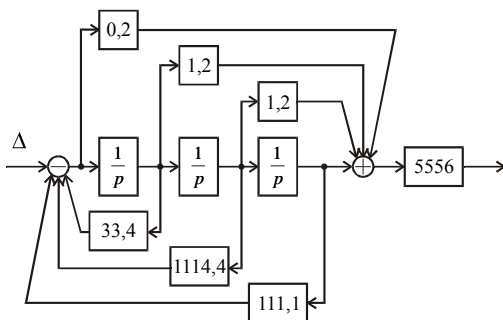


Рис. 6.16. Пример схемной реализации регулятора

Схемная реализация полученной передаточной функции корректирующего звена, соответствующая второму каноническому представлению (см. подразд. 3.6.2), показана на рис. 6.16.



## 6.5. МОДАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА

### 6.5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Модальный метод синтеза обычно применяется для расчета систем, работающих в режиме отработки начальных условий. Поскольку процедура расчета основана на использовании корней характеристического уравнения, которые относятся к модальным характеристикам системы, метод синтеза получил название «модального» [23].

Рассмотрим основные соотношения метода для случая, когда математическая модель объекта управления представлена в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + M(t), & x \in R^n, \\ y = Cx, & u \in R^m, y \in R^m. \end{cases} \quad (6.41)$$

Требования к поведению замкнутой системы формулируются в виде оценок переходных процессов (6.5):  $t_{\Pi} \leq t_{\Pi}^*$  и  $\sigma \leq \sigma^*$ , от которых можно перейти к желаемому распределению корней на комплексной плоскости. На основе выбранных корней формируется желаемое (эталонное) характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p^n + c_n p^{n-1} + \dots + c_2 p + c_1 = 0. \quad (6.42)$$

Метод синтеза предполагает организацию «пропорционального» закона управления

$$u = Kx, \quad (6.43)$$

где  $K$  – матрица назначаемых коэффициентов.

После подстановки алгоритма управления (6.43) в уравнения объекта (6.41) получают уравнения замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + M(t), \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.44)$$

и записывают ее характеристическое уравнение

$$\det[pI - (A + BK)] = p^n + a_n(K)p^{n-1} + \dots + a_2(K)p + a_1(K) = 0. \quad (6.45)$$

Неизвестные коэффициенты матрицы регулятора необходимо определить таким образом, чтобы качество работы замкнутой системы соответствовало заданным оценкам. С этой целью приравнивают характеристическое уравнение замкнутой системы (6.45) желаемому (6.42) и получают соотношения для расчета элементов матрицы  $K$  в виде

$$a_i(K) = c_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.46)$$

Поскольку в общем случае зависимость  $a_i(K)$  может быть нелинейной, найти коэффициенты матрицы  $K$  по выражению (6.46) не всегда удается даже для одноканального объекта, уравнения которого предварительно записывают в канонической форме.

Часто линейный одноканальный объект удобнее описывать с помощью передаточной функции, поэтому обсудим далее операторную методику модального метода синтеза, предложенную на кафедре автоматики НГТУ.

### 6.5.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрим объект управления, поведение которого описывает передаточная функция

$$W_0 = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_{m+1}p^m + b_m p^{m-1} + \dots + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1}, \quad (6.47)$$

где  $m \leq n$ .

Модальный метод синтеза обеспечивает заданную реакцию системы на начальные условия, которая определяется корнями характеристического уравнения. Корни в свою очередь выбираются на основе требований, предъявляемых к динамике в виде условий (6.5). Кроме этого необходимо, чтобы в статике выполнялось условие (6.4), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v \text{ с точностью } \Delta^0 \leq \Delta^*.$$

Таким образом, задача синтеза заключается в обеспечении в замкнутой системе желаемого распределения корней и требуемой статике. Для ее решения предлагается использовать регулятор, который состоит из двух составляющих: последовательного звена  $W_s(p)$  на входе и звена с передаточной функцией  $W_d(p)$  в цепи локальной обратной

связи. Таким образом, структурная схема замкнутой системы задана и имеет вид, представленный на рис. 6.17.

Звено прямого канала с передаточной функцией  $W_s(p)$  будем называть корректором статики, а звено с передаточной функцией  $W_d(p)$  – корректором динамики. Процедура синтеза включает в себя рекомендации по определению параметров этих передаточных функций.

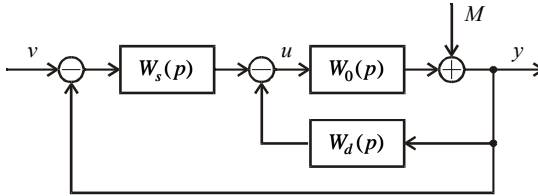


Рис. 6.17. Расчетная структурная схема для модального метода синтеза

Рассмотрим последовательно этапы модального метода синтеза системы регулирования.

### 6.5.3. ВЫБОР КОРРЕКТОРА СТАТИКИ

Для обеспечения условия статики (6.4) при произвольном возмущении  $M(t)$ , т. е. выполнения свойства  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ , предлагается в качестве корректирующего звена  $W_s(p)$  использовать интегратор

$$W_s(p) = \frac{k_s}{p}, \quad (6.48)$$

где  $k_s$  – коэффициент усиления регулятора; его численное значение будет определено позже.

Полагая, что объект и корректор динамики не содержат интегрирующих звеньев, покажем выполнение условия (6.4). С этой целью запишем операторное выражение для выходной величины

$$y = \frac{pM + W_0(p)k_s v}{p + pW_0(p)W_d(p) + W_0(p)k_s}. \quad (6.49)$$

Поскольку в статике передаточные функции  $W_0(p)$  и  $W_d(p)$  «вырождаются» в коэффициенты усиления, получим окончательно  $y = v$ .

Таким образом, использование корректора статики  $W_s(p)$  вида (6.48) делает систему астатической, и условие (6.4) можно обеспечить с ошибкой  $\Delta^0 = 0$ .

### 6.5.4. РАСЧЕТ КОРРЕКТОРА ДИНАМИКИ

В качестве корректора динамики предлагается выбирать звено со следующей передаточной функцией:

$$W_d(p) = \frac{D(p)}{B(p)} = \frac{d_n p^{n-1} + \dots + d_1}{b_{m+1} p^m + b_m p^{m-1} + \dots + b_1}, \quad (6.50)$$

где  $B(p)$  – полином числителя передаточной функции объекта  $W_0(p)$ , а  $D(p)$  – введенный расчетный полином с неизвестными коэффициентами  $d_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Процедура модального метода синтеза заключается в приравнивании действительного и желаемого характеристических уравнений замкнутой системы и вычислении из полученных соотношений параметров регулятора.

Первоначально определим характеристическое уравнение системы, структурная схема которой приведена на рис. 6.17:

$$1 + W_0(p)W_d(p) + W_0(p)W_s(p) = 0. \quad (6.51)$$

С учетом (6.47), (6.48) и (6.50) уравнение (6.51) принимает вид

$$pA(p) + pD(p) + k_s B(p) = 0,$$

причем его порядок равен  $(n+1)$ .

Подставляя вместо  $A(p)$ ,  $D(p)$  и  $B(p)$  их выражения, получим действительное характеристическое уравнение замкнутой системы в следующей форме:

$$p^{n+1} + (a_n + d_n)p^n + \dots + (a_1 + d_1 + k_s b_2)p + k_s b_1 = 0. \quad (6.52)$$

Теперь на основе требований к качеству переходных процессов (заданного перерегулирования  $\sigma^*$  и быстродействия  $t_n^*$ ) сформируем

желаемое характеристическое уравнение того же порядка, что и (6.52). Для его конструирования используем корневые оценки переходных процессов, с помощью которых получим эталонное распределение корней на комплексной плоскости (см. подразд. 5.5.2).

Предварительно определим границу расположения заданных корней системы. Она зависит от заданного времени переходного процесса  $t_n^*$  и приближенно может быть найдена по соотношению

$$\eta \geq \frac{3}{t_n^*}. \quad (6.53)$$

Заданное перерегулирование  $\sigma^*$  ограничивает сектор на комплексной плоскости, внутри которого должны располагаться заданные корни (рис. 6.18). С этой целью по соотношению

$$\sigma^* = 100 \exp(-\pi / \mu^*)$$

определяем требуемое значение колебательности процессов в системе  $\mu^*$ , а затем вычисляем значение мнимой части корней с «максимальным» размахом:

$$\beta = \mu^* \eta. \quad (6.54)$$

Эталонные корни  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_{n+1}^*$  могут выбираться внутри ограниченной области комплексной плоскости (рис. 6.18) произвольным образом. Однако чем дальше они удалены от границы  $\eta$ , тем меньше длительность переходного процесса и больше потребуется ресурс управления объекта. Поэтому рекомендуется выбирать корни  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ , достаточно близкие друг к другу и правой границе области расположения корней, а затем сформировать желаемое уравнение следующим образом:

$$C(p) = (p - \lambda_1^*) \cdot \dots \cdot (p - \lambda_{n+1}^*) = 0. \quad (6.55)$$

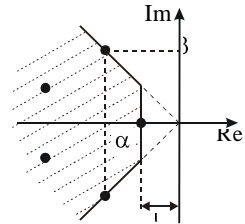


Рис. 6.18. К определению области расположения корней

Характеристическое уравнение (6.55) запишем в стандартном виде

$$C(p) = p^{n+1} + c_{n+1}p^n + \dots + c_1 = 0. \quad (6.56)$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях оператора  $p$  желаемого (6.56) и действительного (6.52) характеристических уравнений системы, запишем выражения для определения неизвестных параметров регулятора:

$$\begin{aligned} c_1 &= k_s b_1, \\ c_2 &= a_1 + d_1 + b_2 k_s, \\ &\dots\dots\dots \\ c_{n+1} &= a_n + d_n. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Полученные из (6.57) расчетные соотношения имеют вид

$$k_s = \frac{c_1}{b_1}, \quad d_i = c_{i+1} - a_i - k_s b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.58)$$

Таким образом, мы определили параметры передаточных функций  $W_s(p)$  и  $W_d(p)$  регулятора, обеспечивающего в системе требуемые свойства в статике и динамике.

### ПРИМЕР 6.8

Поведение одноканального объекта описывает передаточная функция

$$W_0(p) = \frac{5}{p^2 + 3p - 1}.$$

Требуется синтезировать систему, в которой качество процессов будет отвечать следующим требованиям:  $t_n \leq 3$  с;  $\sigma = 0$ ,  $\Delta^0 = 0$ .

Для определения параметров регулятора используем операторную процедуру модального метода синтеза, расчетная структурная схема которого приведена на рис. 6.18.

В качестве корректора статики используем интегрирующее звено с передаточной функцией  $W_s(p) = k/p$ , что гарантирует нулевую статическую ошибку в системе. С целью обеспечения требуемых динамических свойств сформируем корректор динамики в виде

$$W_d(p) = \frac{d_1 p + d_0}{5}.$$

Здесь  $k$ ,  $d_1$ ,  $d_0$  – неизвестные коэффициенты регулятора, которые требуется определить.

Используя структурные преобразования, запишем характеристическое уравнение замкнутой системы (см. рис. 6.17)

$$A(p) = p^3 + (3 + d_1)p^2 + (d_0 - 1)p + 5k = 0.$$

Сформируем теперь желаемое характеристическое уравнение третьего порядка. Предварительно выберем распределение корней, обеспечивающее заданное качество процессов. Поскольку в системе не допускается перерегулирование, корни должны быть вещественными и располагаться на расстоянии не ближе  $\eta \approx 3/t_n^* = 1$  от мнимой оси. В результате выберем следующие корни:

$$\lambda_1^* = -2, \quad \lambda_2^* = -2,5, \quad \lambda_3^* = -3.$$

В соответствии с (6.55) получим желаемое характеристическое уравнение

$$C(p) = p^3 + 7,5p^2 + 18,5p + 15 = 0.$$

Запишем расчетные соотношения (6.57):

$$3 + d_1 = 7,5,$$

$$d_0 - 1 = 18,5,$$

$$5k = 15.$$

Отсюда находим параметры  $d_1 = 4,5$ ,  $d_0 = 19,5$ ,  $k = 3$ . Следовательно, передаточные функции регулятора имеют вид

$$W_s(p) = \frac{3}{p}, \quad W_d(p) = \frac{4,5p + 19,5}{5} = 0,9p + 3,9.$$

### 6.5.5. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕГУЛЯТОРА

Рассмотрим возможность реализации регулятора, рассчитанного модальным методом. Корректор статики с передаточной функцией  $W_s(p)$ , представляющий собой обычный интегратор, не вызывает затруднений. Остановимся подробнее на реализации звена обратной связи с передаточной функцией  $W_d(p)$ .

Поскольку для реальных объектов управления степень полинома числителя передаточной функции  $W_0(p)$  обычно меньше степени полинома ее знаменателя ( $m < n$ ), корректор динамики

$$W_d(p) = \frac{D(p)}{B(p)} = \frac{d_n p^{n-1} + \dots + d_1}{b_{m+1} p^m + b_m p^{m-1} + \dots + b_1},$$

как правило, имеет форсирующий характер. Это означает, что необходимо реализовать дифференцирующие звенья, которые усиливают влияние высокочастотной помехи.

С целью уменьшения этого влияния предлагается использовать специальный фильтр, который подключается параллельно объекту и состоит из модели  $W_m(p)$  (с выходом  $\hat{y}$ ) и стабилизирующей добавки  $L(p)$  (рис. 6.19). Его называют фильтром Калмана–Бьюсси или параллельным фильтром.

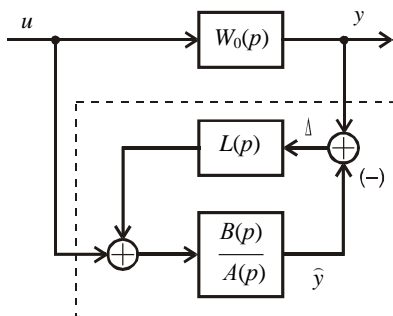


Рис. 6.19. Схема подключения фильтра

Здесь передаточная функция параллельной модели  $W_m(p) = W_0(p)$ . Назначение стабилизирующей добавки  $L(p)$  – «сводить» к нулю разницу между выходом объекта  $y$  и выходом модели  $\hat{y}$ .

Исследуем свойства фильтра, записав выражение для ошибки

$$\Delta = \frac{B(p)}{A(p)} u - \frac{B(p)}{A(p)} [u + L(p)\Delta],$$

которое после преобразований принимает вид

$$A(p) + B(p)L(p) \Delta = 0.$$



Характеристическое уравнение фильтра:

$$A(p) + B(p)L(p) = 0. \quad (6.59)$$

В случае, когда его корни имеют отрицательную вещественную часть, ошибка  $\Delta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, начиная с некоторого момента времени выход модели  $\hat{y}$  будет повторять выход объекта  $y$  как угодно точно.

С помощью стабилизирующей добавки  $L(p)$  можно получить устойчивые процессы в фильтре и для неустойчивого объекта. Кроме того, выбирая соответствующим образом  $L(p)$ , можно ускорить процесс оценивания выходной переменной объекта.

Использование параллельного фильтра позволяет получить схему реализации корректора динамики, изображенную на (рис. 6.20). Эту схему можно упростить, если представить передаточную функцию модели в виде произведения

$$W_m(p) = \frac{1}{A(p)} B(p). \quad (6.60)$$

После несложных структурных преобразований получим окончательно структурную схему реализации замкнутой системы (рис. 6.21).

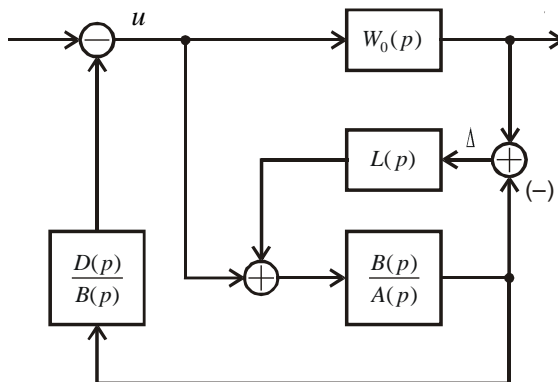


Рис. 6.20. Схемная реализация корректора динамики

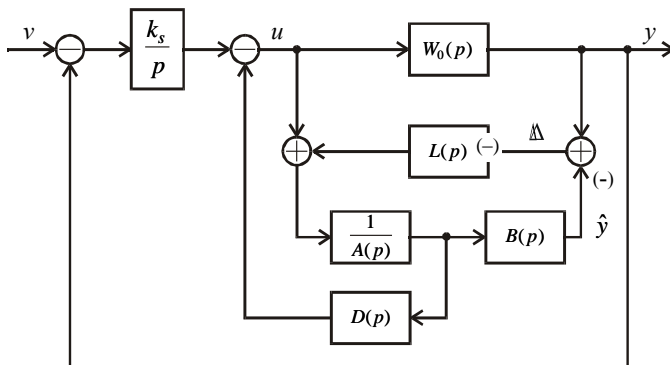


Рис. 6.21. Структурная схема системы с регулятором

Передаточные функции фильтра и регулятора могут быть реализованы на активных элементах после их представления в виде цепочки интеграторов с прямыми и обратными связями согласно первой канонической форме (см. разд. 6.1).

### 6.5.6. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА МОДАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

На основе рассмотренной операторной методики модального метода синтеза можно предложить следующую процедуру расчета регулятора.

1. Проверяются условия разрешимости задачи синтеза для исходного объекта управления.

2. Записывается передаточная функция корректора статики  $W_s(p) = k_s/p$ .

3. Выбирается передаточная функция корректора динамики

4.  $W_d(p) = \frac{d_n p^{n-1} + \dots + d_1}{B(p)}$ , где  $B(p)$  – полином числителя передаточной функции объекта;  $n$  – порядок объекта;  $k_s$ ,  $d_i$  – коэффициенты регулятора, численные значения которых должны быть определены в процессе синтеза  $i = \overline{1, n}$ .

5. В соответствии с расчетной структурной схемой (см. рис. 6.13) находится действительное характеристическое уравнение системы, содержащее неизвестные параметры регулятора (6.52).

6. С учетом требований к качеству переходных процессов ( $\sigma^*$  и  $t_n^*$ ) формируется желаемое характеристическое уравнение системы  $(n+1)$ -го порядка в виде (6.56).

7. Приравняются коэффициенты при соответствующих степенях оператора  $p$  желаемого (6.56) и действительного (6.52) характеристических уравнений системы, записываются расчетные соотношения для параметров регулятора (6.57).

8. В случае, когда степени полиномов числителя и знаменателя передаточной функции объекта связаны соотношением  $m = (n-1)$ , передаточная функция корректора динамики содержит в числителе и знаменателе полиномы одного порядка. Такой регулятор может быть непосредственно реализован в виде цепочки интеграторов с прямыми и обратными связями (подразд. 3.6.1).

9. В ситуации, когда  $m < (n-1)$ , корректор динамики представляет собой форсирующее звено, для его реализации в систему следует вводить специальный фильтр (см. рис. 6.16).

10. При расчете стабилизирующей добавки  $L(p)$  используется методика модального метода синтеза. Сначала формируется желаемое характеристическое уравнение фильтра так, чтобы процессы в нем заканчивались на порядок быстрее, чем в системе (т. е.  $t_{\phi}^* \approx 0,1t_n^*$ ). Приравняются коэффициенты при соответствующих степенях оператора  $p$  полученного желаемого и действительного (6.59) характеристических уравнений фильтра, записываются соотношения для расчета параметров стабилизирующей добавки.

11. Параллельная модель  $W_m(p)$  и стабилизирующая добавка  $L(p)$  реализуются в виде цепочки интеграторов, из внутренних переменных модели формируется форсирующий регулятор.

#### ПРИМЕР 6.9

Предложить схемную реализацию регулятора, рассчитанного для объекта с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{5}{p^2 + 3p - 1}$$

из примера 6.8.

Найденные из условия требуемого качества процессов в замкнутой системе передаточные функции регулятора имеют вид

$$W_s(p) = \frac{3}{p}, \quad W_d(p) = \frac{d_1 p + d_0}{5},$$

где  $d_1 = 4,5$ ;  $d_0 = 19,5$ .

Как видим, корректор динамики представляет собой форсирующее звено первого порядка, поэтому для его реализации введем в систему стабилизирующую добавку с передаточной функцией

$$L(p) = \frac{k_L(\tau_1 + 1)}{\tau_2 p + 1}.$$

С учетом передаточной функции модели объекта

$$W_m(p) = \frac{5}{p^2 + 3p - 1}$$

запишем действительное характеристическое уравнение фильтра (6.59) в виде

$$A_\Phi(p) = p^2 + 3p - 1 + 5 \frac{k_L(\tau_1 + 1)}{\tau_2 p + 1} = 0,$$

или

$$A_\Phi(p) = (\tau_2 p + 1)(p^2 + 3p - 1) + 5k_L(\tau_1 + 1) = 0.$$

Представим это уравнение в стандартной форме

$$A_\Phi(p) = p^3 + \frac{(1 + 3\tau_2)}{\tau_2} p^2 + \frac{(5k_L\tau_1 + 3 - \tau_2)}{\tau_2} p + \frac{(1 + 5k_L)}{\tau_2} = 0.$$

Сформируем желаемое характеристическое уравнение фильтра так, чтобы процессы в нем заканчивались на порядок быстрее, чем в системе.

При этом выберем  $t_\Phi^* \approx 0$ ,  $t_n^* = 0,3$  с.

Поскольку в системе не допускается перерегулирование, сохраним это условие и для фильтра. Таким образом, корни должны быть вещественными и располагаться на расстоянии не ближе  $\eta \approx 3/t_\Phi^* = 10$  от мнимой оси.

В результате выберем следующие корни:

$$\lambda_{\Phi 1}^* = -11, \quad \lambda_{\Phi 2}^* = -12, \quad \lambda_{\Phi 3}^* = -13.$$

Запишем желаемое характеристическое уравнение фильтра

$$C_{\phi}(p) = p - \lambda_{\phi 1}^* \quad p - \lambda_{\phi 2}^* \quad p - \lambda_{\phi 3}^* = 0.$$

В результате подстановки численных значений корней получим

$$C_{\phi}(p) = p^3 + 36p^2 + 431p + 1716 = 0.$$

Определим расчетные соотношения для параметров стабилизирующей добавки, для чего приравняем коэффициенты уравнений  $A_{\phi}(p)$  и  $C_{\phi}(p)$  :

$$\frac{(1 + 3\tau_2)}{\tau_2} = 36,$$

$$\frac{(5k_L\tau_1 + 3 - \tau_2)}{\tau_2} = 431,$$

$$\frac{(1 + 5k_L)}{\tau_2} = 1716.$$

Отсюда найдем  $k_L = 10,2$ ,  $\tau_1 \approx 0,2$ ,  $\tau_2 \approx 0,03$ .

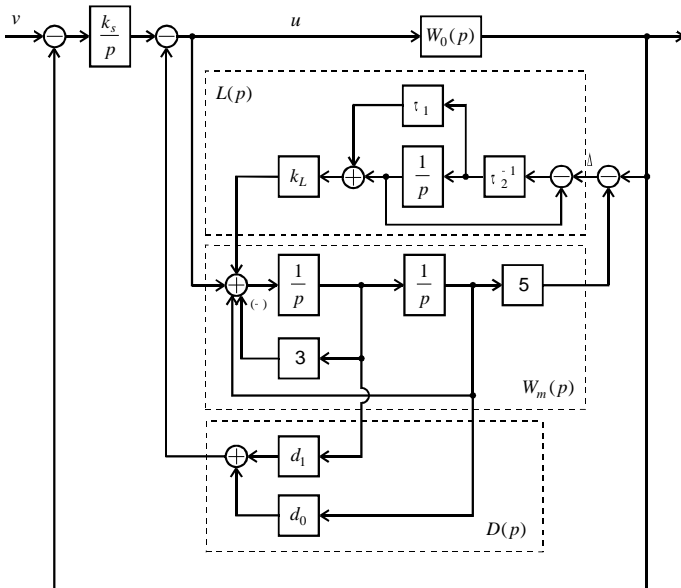


Рис. 6.22. Структурная схема системы для примера 6.9

Таким образом, передаточная функция стабилизирующей добавки имеет вид

$$L(p) = \frac{10,2(0,2p+1)}{0,03p+1}.$$

В соответствии с рекомендациями подразд. 3.6.1 и структурной схемой, представленной на рис. 6.21, приведем на рис. 6.22 полную структурную схему системы с учетом реализации регулятора. На схеме пунктиром выделены:  $W_m(p)$  – параллельная модель;  $L(p)$  – стабилизирующая добавка;  $D(p)$  – полином числителя корректора динамики.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрели два наиболее распространенных метода синтеза линейных систем, каждый из которых имеет предпочтительную область применения. Частотный метод в основном используется при синтезе систем, работающих в режиме слежения или отработки входного воздействия. Модальный метод обычно применяется для расчета систем, основным режимом которых является отработка начальных условий.

Выбирая подходящий метод расчета системы управления для конкретного объекта, следует убедиться в том, что задача синтеза будет разрешима. С этой целью необходимо исследовать свойства объекта управления и реальные ограничения на переменные состояния и управления, а также требования, которые предъявляются к качеству работы замкнутой системы. Надо твердо знать, что эти требования и возможности объекта не противоречат друг другу, поэтому предварительно рекомендуется проверять условия разрешимости задачи синтеза.

Заключительным этапом любой процедуры расчета и проектирования регулятора является эксперимент на реальной системе. Как правило, по его результатам возникает необходимость в уточнении модели объекта, а затем в корректировке структуры и параметров регулятора. Таким образом, на практике реализуется итерационная процедура синтеза, и чем точнее была получена исходная модель объекта, тем меньше будет сделано итераций. Отметим, что в практике проектирования этап настройки системы неизбежен, и его процедуру следует продумать еще при расчете и реализации регулятора.

## З А Д А Ч И

**6.1.** Поведение объекта описывает передаточная функция вида

$$W_0(p) = \frac{10}{(10p+1)(0,01p^2+0,1p+1)}.$$

Рассчитать параметры регулятора частотным методом в системе, схема которой приведена на рис. 6.23, с учетом требований к показателям качества переходных процессов:  $t_n \leq 10$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta \leq 5\%$ .

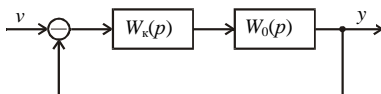


Рис. 6.23. Расчетная схема системы  
для задачи 6.1

**6.2.** Для системы, структурная схема которой показана на рис. 6.24, рассчитать параметры регулятора частотным методом с учетом следующих требований к качеству переходных процессов:  $t_n \leq 5$  с,  $\sigma \leq 20\%$ ,  $\delta \leq 5\%$ .

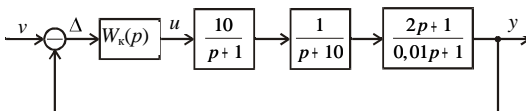


Рис. 6.24. Структурная схема системы  
для задачи 6.2

**6.3.** Для системы, структурная схема которой приведена на рис. 6.25, рассчитать параметры  $W_k(p)$  частотным методом с учетом следующих требований к качеству переходных процессов:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta_{\text{скор}} \leq 5\%$ .

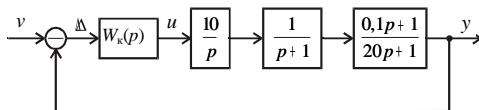


Рис. 6.25. Структурная схема системы  
для задачи 6.3

**6.4.** Для системы, структурная схема которой показана на рис. 6.26, рассчитать параметры регулятора частотным методом с учетом следую-

ших требований к качеству переходных процессов:  $t_n \leq 5$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta \leq 5\%$ .

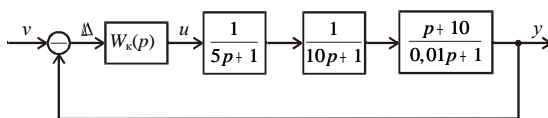


Рис. 6.26. Структурная схема системы для задачи 6.4

**6.5.** Рассчитать параметры  $W_k(p)$  частотным методом в системе (см. рис. 6.23) с учетом требований к показателям качества переходных процессов:  $t_n \leq 1,5$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta \leq 2\%$ . Передаточная функция объекта следующая:

$$W_0(p) = \frac{10}{(p+100)(0,25p^2 + 0,425p + 1)}.$$

**6.6.** Рассчитать параметры регулятора частотным методом в системе (см. рис. 6.23) с учетом требований к показателям качества переходных процессов:  $t_n \leq 10$  с,  $\sigma \leq 20\%$ ,  $\delta \leq 5\%$ . Модель объекта имеет вид

$$W_0(p) = \frac{10}{p(p+1)(0,1p+1)}.$$

**6.7.** Рассчитать частотным методом регулятор для системы (см. рис. 6.23) с учетом требований к показателям качества переходных процессов:  $t_n \leq 2$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta \leq 5\%$ . Передаточная функция объекта следующая:

$$W_0(p) = \frac{50}{(10p+1)(p+1)(0,01p+1)}.$$

**6.8.** Синтезировать систему (см. рис. 6.23) частотным методом с учетом требований к качеству переходных процессов:  $t_n \leq 2$  с,  $\sigma \leq 20\%$ ,  $\delta_{\text{сгор}} \leq 5\%$ . Модель объекта следующая:

$$W_0(p) = \frac{10(p+0,1)}{p(5p+1)(0,1p+1)}.$$

**6.9.** Записать характеристический полином четвертого порядка, соответствующий следующим показателям качества процессов:  $t_n \leq 10$  с,  $\sigma \leq 40\%$ ,  $\Delta^0 = 0$ .



**6.10.** Сформировать желаемый характеристический полином третьего порядка, соответствующий следующим показателям качества процессов:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma \leq 20$  %,  $\delta^0 \leq 4$  %.

**6.11.** Для объекта управления, модель которого имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 3x_2 + 2u, \\ y = x_1, \end{cases}$$

рассчитать параметры регулятора модальным методом. Требования к качеству переходных процессов в системе следующие:  $t_n \leq 2$  с,  $\sigma \leq 30$  %,  $\delta \leq 5$  %.

**6.12.** Используя общую методику модального метода, для объекта управления, модель которого имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \\ y = x_1 - x_2, \end{cases}$$

рассчитать параметры регулятора. Требования к качеству процессов в системе следующие:  $t_n \leq 10$  с,  $\sigma = 0$ ,  $\delta \leq 5$  %.

**6.13.** Для объекта управления, модель которого имеет вид

$$W_0(p) = \frac{5(2p+1)}{p^2 + 3p - 2},$$

рассчитать параметры регулятора модальным методом. Требования к качеству переходных процессов в системе следующие:  $t_n \leq 5$  с,  $\sigma \leq 20$  %,  $\delta \leq 2$  %.

**6.14.** Рассчитать параметры регулятора модальным методом для объекта, модель которого имеет вид

$$W_0(p) = \frac{2}{p^3 + 4p^2 - p + 1},$$

Переходные процессы в системе должны удовлетворять оценкам:  $t_n \leq 1$  с,  $\sigma \leq 30$  %,  $\delta \leq 4$  %.

**6.15.** Для объекта управления, поведение которого описывает передаточная функция

$$W_0(p) = \frac{0,2}{p^2 - 2p + 5},$$

рассчитать регулятор модальным методом. Качество переходных процессов в системе определяют желаемые корни характеристического уравнения:  $p_{1,2} = -2 \pm j \cdot 2$ ,  $p_3 = -3$ . В систему следует добавить фильтр со стабилизирующей добавкой

$$L(p) = \frac{k_L(\tau_1 + 1)}{\tau_2 p + 1}$$

и задать следующие корни характеристического уравнения фильтра:  $p_{1,2} = -20 \pm j \cdot 10$ ,  $p_3 = -25$ . Представить структурную схему системы с учетом реализации регулятора.

**6.16.** Рассчитать регулятор на основе операторной методики модального метода синтеза для объекта, поведение которого описывает передаточная функция

$$W_0(p) = \frac{2}{5p^2 + 3p - 1}.$$

Необходимо обеспечить следующие показатели качества переходных процессов в замкнутой системе:  $t_n \leq 2$  с,  $\sigma \leq 10\%$ ,  $\delta = 0$ ; при этом измерению доступен только выход, поэтому в систему следует добавить фильтр. Представить схему реализации регулятора.

**6.17.** Рассчитать параметры регулятора и фильтра для объекта, поведение которого описывается передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{5(3p + 1)}{(p + 1)(p - 2)}.$$

Качество переходных процессов в замкнутой системе должно соответствовать оценкам:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta \leq 2\%$ . Представить структурную схему системы с учетом реализации регулятора.

**6.18.** Рассчитать параметры регулятора и фильтра для объекта, поведение которого описывается передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{10}{(2p + 1)(5p + 1)}.$$

Качество переходных процессов в замкнутой системе должно соответствовать оценкам:  $t_n \leq 12$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\delta \leq 5\%$ . Изобразить структурную схему системы с учетом реализации регулятора.

---

---

## Глава 7

---

---

# ЛИНЕЙНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

---

---

### 7.1. ВВЕДЕНИЕ

**В** настоящей главе мы последовательно рассмотрим все вопросы «линейной» теории применительно к импульсным системам. Теория импульсных систем получила бурное развитие в связи с достижениями цифровой электроники и, в частности, с развитием вычислительной техники, которая проникает во все сферы деятельности человека и используется повсеместно. В последние годы традиционные непрерывные регуляторы (контроллеры) интенсивно заменяются цифровыми, поскольку они имеют неоспоримые преимущества: компактность, стабильность работы, малое энергопотребление, высокую точность, а также гибкость реализации алгоритмов контроля и управления, которая достигается простой заменой программного обеспечения.

Для того чтобы обсуждать свойства импульсных систем автоматического управления, будем иметь в виду функциональную схему, показанную на рис. 7.1.

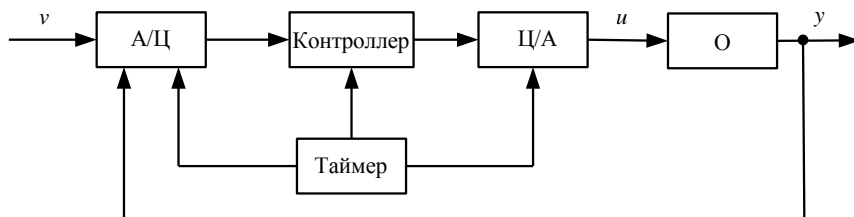


Рис. 7.1. Функциональная схема импульсной системы автоматического управления

Основными элементами цифровой системы автоматического управления (ЦСАУ), как видим, являются:

- **О** – непрерывный объект управления;
- **контроллер** (микропроцессор, микроконтроллер, микроЭВМ, ПЭВМ, УВМ);
- **А/Ц и Ц/А – аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи**, к которым предъявляются требования синхронности и синфазности их работы;
- **таймер**, предназначенный для синхронизации работы всей системы.

Назначение контроллера – формировать управляющее воздействие, обеспечивающее заданное качество работы системы.

В дальнейшем будем рассматривать как одноканальные объекты управления, так и многоканальные, для которых  $(v, u, y) \in R^m$ , где  $v$  – входные задающие сигналы;  $u$  – управляющие воздействия;  $y$  – выходные, контролируемые переменные объекта управления, доступные измерению;  $m$  – число каналов управления в объекте.

Главная особенность ЦСАУ состоит в том, что управляющие воздействия, формируемые с помощью ЭВМ, принимают дискретные значения в дискретные моменты времени, т.е. они квантованы как по уровню, так и по времени. В дальнейшем мы не будем учитывать квантование управляющих воздействий по уровню, поскольку современные контроллеры имеют достаточно высокую разрядность АЦ и ЦА и «вес» одного разряда сопоставим с точностью измерения контролируемых переменных объекта управления. Управляющие воздействия вычисляются по заданному алгоритму с помощью контроллера и передаются на ЦА, который фиксирует значения воздействий на время, равное шагу квантования  $T$ , т.е. представляют собой последовательность импульсов, появляющихся в фиксированные моменты времени.

## 7.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

### 7.2.1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Они являются основным аппаратом описания линейных импульсных систем. В отличие от дифференциальных, где аргумент – непрерывное время, в разностных уравнениях аргумент – дискретное время. Многоканальный объект описывают разностным уравнением в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} x(kT + T) = Ax(kT) + Bu(kT), \\ y(kT) = Cx(kT). \end{cases} \quad (7.1)$$

Здесь  $T$  – шаг квантования,  $kT$  – текущий момент времени;  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^m$  – вектор управляющих воздействий,  $n$  – порядок объекта;  $n \geq m$ ;  $A$  – квадратная матрица действительных коэффициентов;  $B, C$  – прямоугольные матрицы действительных коэффициентов,  $y \in R^m$  – выходные переменные системы.

Разностные уравнения связывают переменные состояния системы, управление и выход только в фиксированные моменты времени. Часто в записи разностного уравнения величину  $T$  опускают (так как она задана и неизменна), тогда уравнения выглядят так:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (7.2)$$

Эту форму называют основной формой записи разностного уравнения или системой разностных уравнений в матричной форме.

К формам (7.1) и (7.2) нужно приводить уравнения движения реальных импульсных систем (рис. 7.1) с непрерывным объектом.

Рассмотрим подробно процедуру вывода разностных уравнений и с этой целью представим векторно-матричное описание линейного непрерывного многоканального объекта на языке дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) = \bar{C}x(t). \end{cases} \quad (7.3)$$

С помощью понятия переходной матрицы, при известных начальных условиях  $x(0)$ , можно записать решение дифференциального уравнения (7.3):

$$x(t) = e^{\bar{A}t} x(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B}u(\tau) d\tau.$$

Найдем значение вектора состояния при  $t = T$ :

$$x(T) = e^{\bar{A}T} x(0) + \int_0^T e^{\bar{A}(T-\tau)} \bar{B}u(\tau) d\tau.$$

Так как значение  $u$  фиксировано в течение кванта  $T$ , то

$$x(T) = e^{\bar{A}T} x(0) + \bar{A}^{-1} e^{\bar{A}T} - I \bar{B}u(0).$$

Используя найденное значение  $x(T)$  в качестве начальных условий, на основании последнего выражения можно найти значение вектора состояния на следующем шаге  $x(2T)$  и так далее. В итоге для произвольного момента времени получаем

$$x(kT + T) = Ax(kT) + Bu(kT), \quad y(kT) = Cx(kT),$$

где  $A = e^{\bar{A}T}$ ,  $B = \bar{A}^{-1}(e^{\bar{A}T} - I)\bar{B}$ ,  $C = \bar{C}$ .

Воспользуемся теперь разложением экспоненты в ряд Тейлора и получим соотношения, позволяющие вычислить искомые матрицы:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{A}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{A}^{i-1} T^i}{i!} \bar{B}. \quad (7.4)$$

Количество членов ряда, необходимых для вычисления матриц  $A$  и  $B$ , определяется соотношением значений коэффициентов исходных матриц и шага квантования  $T$ , а также заданной точностью вычислений.

В практических расчетах иногда применяют и приближенный способ вывода разностных уравнений, основанный на аппроксимации производных.

Рассмотрим исходную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u = \frac{dx}{dt}.$$

Заменяем здесь дифференциалы конечными разностями

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \bar{A}x + \bar{B}u.$$

Будем считать, что шаг квантования  $T$  пренебрежимо мал по сравнению с темпом процессов в объекте. Тогда можно принять  $\Delta t = T$  и  $\Delta x = x(k+1) - x(k)$ , после чего в итоге получим

$$x(k+1) \approx x(k) + T\bar{A}x(k) + T\bar{B}u(k).$$

Если сравнить последнее уравнение с уже полученным результатом, то увидим, что это есть первое приближение к матрицам, представленным уравнениями (7.4).

#### ПРИМЕР 7.1

Выполнить переход от непрерывной модели, заданной в виде дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t) = \dot{u}(t) + 2u(t),$$

к дискретной в виде разностного уравнения, методом конечных разностей при заданной величине шага дискретизации по времени  $T = 0,1$  с.

Перейдем от дифференциалов к конечным разностям

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(k+1) - x(k)}{T},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{x(k+2) - 2x(k+1) + x(k)}{T^2},$$

подставим их в исходное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2}(x(k+2) - 2x(k+1) + x(k)) + \frac{2}{T}(x(k+1) - x(k)) + 3x(k) = \\ = \frac{1}{T}(u(k+1) - u(k)) + 2u(k), \end{aligned}$$

при заданном значении шага дискретизации по времени  $T$ :

$$\begin{aligned} 100x(k+2) - 200x(k+1) + 100x(k) + 20x(k+1) - 20x(k) + 3x(k) = \\ = 10u(k+1) - 10u(k) + 2u(k). \end{aligned}$$

Приведем подобные и отнормируем последнее выражение, в итоге получим разностное уравнение

$$x(k+2) - 1,8x(k+1) + 0,83x(k) = 0,1u(k+1) - 0,08u(k).$$

Порядок разностного уравнения совпадает с порядком исходного дифференциального уравнения.

### ПРИМЕР 7.2

Выполнить переход от непрерывной модели, заданной в виде дифференциального уравнения из примера 7.1, к разностному уравнению при том же шаге дискретизации по времени, используя матричную процедуру.

Запишем матрицы непрерывной модели, соответствующие дифференциальному уравнению:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицы дискретной модели в соответствии с выражениями (7.4), при этом ограничимся тремя членами ряда:

$$A = I + \frac{\bar{A}T}{1!} + \frac{\bar{A}^2T^2}{2!} + \frac{\bar{A}^3T^3}{3!} = \begin{bmatrix} 0,9860 & -0,2705 \\ 0,0902 & 0,8057 \end{bmatrix};$$

$$B = \left( \frac{I \cdot T}{1!} + \frac{\bar{A}T^2}{2!} + \frac{\bar{A}^2T^3}{3!} \right) \bar{B} = \begin{bmatrix} 0,1850 \\ 0,0995 \end{bmatrix}.$$

С помощью известной матрицы  $C$  и найденных матриц  $A$ ,  $B$  можно перейти к разностному уравнению, аналогичному полученному в примере 7.1, результат следующий:

$$x(k+2) - 1,7917x(k+1) + 0,8188x(k) = 0,0995u(k+1) - 0,0814u(k).$$

Как видим, коэффициенты двух разностных уравнений достаточно близки, однако дискретная модель из примера 7.2 найдена с более высокой точностью.



### 7.2.2. РЕШЕТЧАТЫЕ ФУНКЦИИ

Отличительной особенностью импульсных систем является квантование управляющего воздействия по времени (рис. 7.2), и это позволяет вводить в рассмотрение новые характеристики, в частности, решетчатые функции.

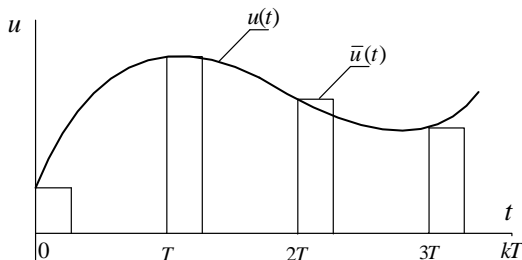


Рис. 7.2. Пример квантованного по времени управляющего воздействия

Если длительность импульсов управления  $h \ll T$ , то приближенно можно прямоугольные импульсы управления заменить на эквивалентные им взвешенные дельта-функции. Это представление управляющего воздействия будем называть решетчатым (рис. 7.3).

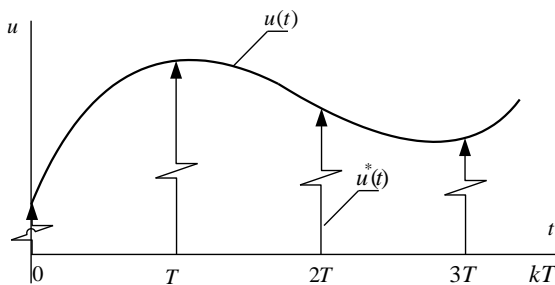


Рис. 7.3. Пример решетчатого управляющего воздействия  $u^*(t)$

Такая замена возможна потому, что темп процессов в объектах управления много медленнее процессов нарастания и спада прямоугольного импульса, а реакция динамических объектов на прямоугольный

импульс и на эквивалентную ему дельта-функцию будет практически одинаковой.

Управляющее воздействие после обсуждаемой замены можно представить в следующем виде:

$$\bar{u}(t) \cong u^*(t) = \frac{u(t)h}{1c} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{h}{1c} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT),$$

где  $u^*(t)$  – решетчатая функция;  $\bar{u}(t)$  – реальная последовательность прямоугольных импульсов.

Если Ц/А и А/Ц в системе работают синхронно и синфазно, то величина  $h$  может быть любой, поэтому ее можно принять равной 1 с:

$$\bar{u}(t) \cong \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT) = u^*(t).$$

Последнее выражение есть управляющее воздействие, представленное в виде решетчатой функции. Такой вид представления упрощает анализ процессов в линейных импульсных системах.

### 7.2.3. ЭКСТРАПОЛЯТОР НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Управляющее воздействие в большинстве цифровых систем формируется на выходе ЦА и имеет ступенчатый вид (рис. 7.4).

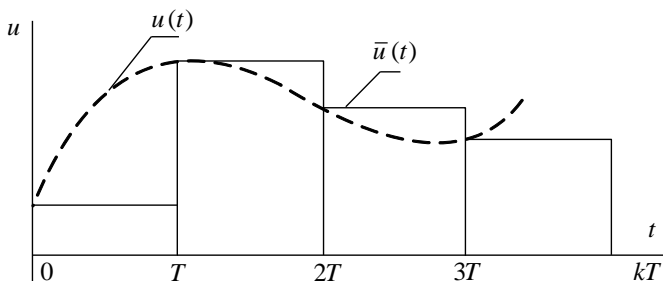


Рис. 7.4. Пример ступенчатого управления  $\bar{u}(t)$ :  
(пунктиром показано непрерывное управляющее воздействие  $u(t)$ )

**Экстраполятором нулевого порядка называют устройство, преобразующее непрерывный управляющий сигнал  $u(t)$  в реальное ступенчатое управление  $\bar{u}(t)$**  (рис. 7.5), где ИИЭ – идеальный импульсный элемент, преобразующий непрерывное управляющее воздействие в решетчатую функцию; ФФ – формирующий фильтр, преобразующий решетчатую функцию в последовательность прямоугольных импульсов.

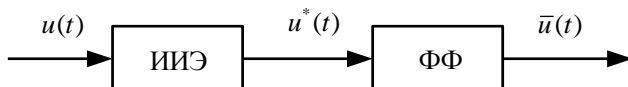


Рис. 7.5. Функциональная схема экстраполятора нулевого порядка

Структурно ИИЭ представлен на рис. 7.6 и реализован на звене умножения, на один вход которого подается непрерывное управление, а на другой – последовательность дельта-функций.

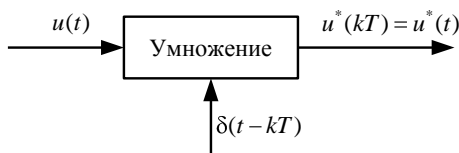


Рис. 7.6. Структурное представление идеального импульсного элемента

Для получения аналитической модели формирующего фильтра графически представим прямоугольный импульс в виде суммы двух ступенчатых импульсов (рис. 7.7). Напомним, что единичная ступенчатая функция – это интеграл от дельта-функции.

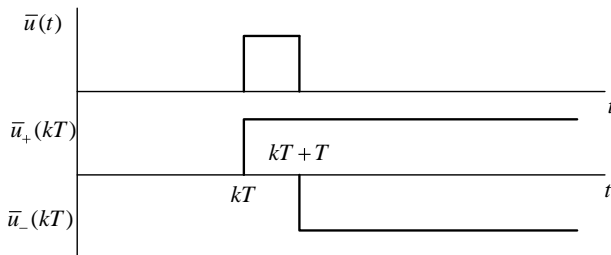


Рис. 7.7. Пример прямоугольного импульса управления

Структурная схема модели ФФ представлена на рис. 7.8.

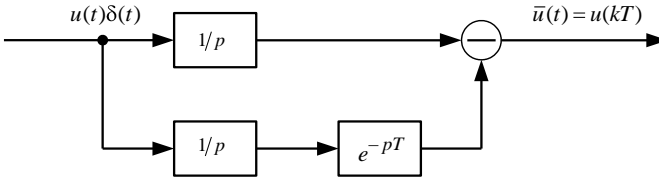


Рис. 7.8. Структурная схема модели формирующего фильтра. Здесь  $p$  – оператор дифференцирования

Как видим, передаточная функция ФФ имеет вид

$$W_{\text{ФФ}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} = \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (7.5)$$

Аналогичный результат можно получить, используя преобразование Лапласа:

$$x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

где  $s = \delta + j\omega$  – оператор Лапласа.

Найдем преобразование Лапласа решетчатого управляющего воздействия:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \delta(t - kT) \Rightarrow u^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs}. \quad (7.6)$$

Проведем эту процедуру для ступенчатого управляющего воздействия:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) (1(t - kT) - 1(t - (k+1)T)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{u}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs} \underbrace{\frac{1}{s} (1 - e^{-sT})}_{W_{\text{ФФ}}(s)} = u^*(s) W_{\text{ФФ}}(s). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Последнее равенство – это преобразование Лапласа для ступенчатого управляющего воздействия.

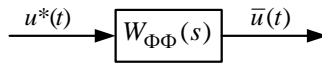


Рис. 7.9. Структурная схема формирующего фильтра

На рис. 7.9 показано структурное представление формирующего фильтра, а на рис. 7.10 приведена структурная схема системы с экстраполятором нулевого порядка.

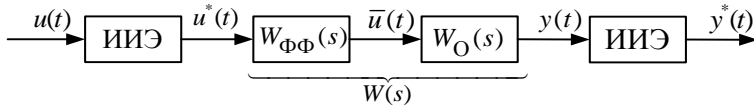


Рис. 7.10. Структурная схема системы с экстраполятором нулевого порядка

Последовательное соединение формирующего фильтра и объекта называют приведенной непрерывной частью (ПНЧ), ее передаточная функция

$$W(s) = W_{\text{ФФ}}(s)W_{\text{О}}(s).$$

#### 7.2.4. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Такое преобразование используют для установления операторной связи между решетчатым входом  $u^*(t)$  и решетчатым выходом системы  $y^*(t)$ , показанной на рис. 7.10 (второй ИИЭ на выходе объекта необходим для получения выходного сигнала в виде решетчатой функции). Решетчатый вход имеет вид

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT).$$

Реакция линейного объекта (в данном случае ПНЧ) на дельта-функцию есть импульсная переходная функция (ИПФ)  $g(t)$  (см. главу 2, разд. 2.4). Поскольку на вход ПНЧ действует последовательность

дельта-функций, в соответствии с принципом суперпозиции выход ПНЧ представляет собой сумму реакций на последовательность дельта-функций, т. е. сумму импульсных переходных функций

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g(t - kT).$$

Далее непрерывный выходной сигнал преобразуется в решетчатый по известной процедуре:

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g(nT - kT)\delta(t - nT).$$

К решетчатому выходу  $y^*(t)$  применяется преобразование Лапласа. В итоге получаем изображение решетчатого выхода  $y^*(s)$ :

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g(nT - kT)e^{-nTs},$$

где  $g(t)$  – импульсная переходная функция ПНЧ.

Введем новую переменную  $q = n - k$ , тогда  $n = q + k$ ,

$$y^*(s) = \sum_{q=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g(qT)e^{-(q+k)Ts} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT)e^{-qTs} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-kTs}.$$

Напомним, что ИПФ равна нулю при отрицательных значениях аргумента, при выводе было использовано это свойство. В итоге получим

$$y^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT)e^{-qTs} u^*(s).$$

Операторное соотношение, связывающее изображения решетчатого входа и решетчатого выхода, есть дискретная передаточная функция

$$W^*(s) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT)e^{-qTs}.$$

Введем новый оператор  $z = e^{sT}$  и назовем его оператором сдвига на шаг вперед, тогда изображение по Лапласу управляющего сигнала (7.6) можно представить в виде  $z$ -изображения

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k}, \quad (7.8)$$

а дискретная передаточная функция принимает вид

$$W(z) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT)z^{-q}.$$

Последовательно выполняя операторные преобразования ИПФ, построим цепочку выводов:

$$\begin{aligned} g(t) = L^{-1} W(s) &\Rightarrow g(qT) = L^{-1} W(s) \underset{qT}{\Rightarrow} W(z) = \mathfrak{Z} g(qT) \Rightarrow \\ &\Rightarrow W(z) = \mathfrak{Z} L^{-1} W(s) \underset{qT}{\Rightarrow} W(z) = Z \left\{ \frac{1-z^{-1}}{s} W_O(s) \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow W(z) = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{W_O(s)}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Последнее равенство в этой цепочке (7.9) и есть рабочее соотношение для нахождения дискретной передаточной функции непрерывного объекта, при условии, что на его входе и выходе стоят экстраполяторы нулевого порядка.

Основные теоремы  $Z$ -преобразования приведены в приложении 1, а таблица  $Z$ -преобразования – в приложении 2.

### ПРИМЕР 7.3

Задана передаточная функция непрерывного объекта

$$W_O(s) = \frac{2}{0,04s^2 + 0,5s + 1}.$$

Необходимо найти дискретную передаточную функцию  $W(z)$  при шаге дискретизации по времени  $T = 0,02$  с.

Предварительно произведем разложение передаточной функции  $\frac{W_O(s)}{s}$  на сумму простых дробей:

$$\frac{W_O(s)}{s} = \frac{1}{s} \frac{2}{0,04s^2 + 0,5s + 1} = \frac{2}{s} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+10} - \frac{8}{3} \frac{1}{s+2,5}.$$

Воспользуемся выражением (7.9), таблицей Z-преобразования (см. приложение) и получим

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_O(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{2}{s} + \frac{2}{3} * \frac{1}{s+10} - \frac{8}{3} * \frac{1}{s+2,5} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ 2 \frac{z}{z-1} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-e^{-10T}} - \frac{8}{3} \frac{z}{z-e^{-2,5T}} \right\} = \frac{0,0092z + 0,0085}{z^2 - 1,77z + 0,7788}. \end{aligned}$$

Дискретная передаточная функция имеет второй порядок, такой же, как и исходная непрерывная передаточная функция

### 7.2.5. ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Дискретную передаточную функцию объекта найдем, используя систему разностных уравнений (7.2), по аналогии с непрерывной передаточной функцией (см. главу 2, разд. 2.6).

Если запишем уравнение состояния в операторной форме

$$zx(z) = Ax(z) + Bu(z),$$

из которого можно определить вектор состояния

$$x(z) = (zI - A)^{-1} Bu(z),$$

то второе уравнение системы (7.2) позволяет найти вектор выхода

$$y(z) = C(zI - A)^{-1} Bu(z).$$

Матрица взаимосвязи между вектором выходных переменных и вектором управляющих воздействий в последнем выражении есть матричная передаточная функция

$$W(z) = C(zI - A)^{-1} B, \quad (7.10)$$



которая имеет размерность  $m \times m$

$$W(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1m}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}(z) & \dots & W_{mm}(z) \end{bmatrix},$$

где  $W_{ij}(z)$  – скалярная передаточная функция, связывающая управляющее воздействие  $u_i(z)$  и выходную переменную  $y_j(z)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Представим нормированную передаточную функцию одноканального объекта в виде отношения полиномов числителя  $B(z)$  и знаменателя  $A(z)$ :

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}. \quad (7.11)$$

Нормирование передаточной функции состоит в том, что коэффициент при старшей степени оператора  $z$  в знаменателе равен единице.

Отметим очень важное свойство дискретной передаточной функции: порядок полинома числителя у большинства объектов равен  $(n-1)$ , где  $n$  – порядок объекта. Исключением из этого правила являются объекты, исходная непрерывная передаточная функция которых имеет полиномы числителя и знаменателя одинакового порядка, дискретная передаточная функция в этом случае также будет иметь полиномы числителя и знаменателя одинакового порядка, равного порядку объекта  $n$ :

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Коэффициент передачи объекта в статике  $K_0$  можно найти, используя теорему о конечном значении

$$K_0 = \lim_{z \rightarrow 1} W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i}{1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j}.$$

Перейдем от передаточной функции к разностному уравнению и для этого рассмотрим соотношение

$$y(z) = W(z)u(z). \quad (7.12)$$

Подставим в (7.12) передаточную функцию (7.11) и запишем разностное уравнение в операторной форме

$$\begin{aligned} z^n y(z) + a_{n-1} z^{n-1} y(z) + \dots + a_1 z y(z) + a_0 y(z) = \\ = b_{n-1} z^{n-1} u(z) + \dots + b_1 z u(z) + b_0 u(z). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Используя теоремы Z-преобразования, можно перейти от (7.13) к обычному разностному уравнению в дискретном времени

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ = b_{n-1} u(k+n-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Сдвигом аргумента можно преобразовать (7.14):

$$\begin{aligned} y(k) = -a_{n-1} y(k-1) - \dots - a_1 y(k-n+1) - a_0 y(k-n) + \\ + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n). \end{aligned}$$

Как видим, текущее значение  $y(k)$  зависит от  $n$  предыдущих значений  $y(i)$  и  $u(i)$ , что можно назвать свойством памяти динамических систем.

#### ПРИМЕР 7.4

Найти дискретную передаточную функцию по заданной системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + 2u(k), \\ y(k) = x_1(k) + 2x_2(k). \end{cases}$$

Запишем матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  дискретной модели:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Дискретную передаточную функцию для заданной системы разностных уравнений найдем по выражению (7.10). Сделаем это поэтапно:

$$1) zI - A = \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix};$$

$$2) \det |zI - A| = (z-1)^2 + 2 = z^2 - 2z + 3;$$

$$3) zI - A^{-1} = \frac{1}{z^2 - 2z + 3} \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix};$$

$$4) W(z) = 1 \quad 2 \frac{1}{z^2 - 2z + 3} \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{z^2 - 2z + 3} \begin{bmatrix} z+3 & 2z-3 \\ 2 & z-3 \end{bmatrix} = \frac{5z-3}{z^2 - 2z + 3}.$$

Передаточная функция имеет второй порядок, такой, как порядок исходного разностного уравнения.

### ПРИМЕР 7.5

Перейти от дискретной передаточной функции  $W(z)$  к разностному уравнению, где

$$W(z) = \frac{0,4z^2 - 0,3z + 0,2}{z^3 + 0,6z^2 - 0,9z + 1,2}.$$

Поскольку передаточная функция есть отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях, разностное уравнение в операторной форме имеет вид

$$(z^3 + 0,6z^2 - 0,9z + 1,2)y(z) = (0,4z^2 - 0,3z + 0,2)u(z).$$

Воспользуемся теоремами Z-преобразования и получим разностное уравнение в дискретном времени

$$y(k+3) + 0,6y(k+2) - 0,9y(k+1) + 1,2y(k) = \\ = 0,4u(k+2) - 0,3u(k+1) + 0,2u(k).$$

Как видим, порядок разностного уравнения  $n = 3$  и совпадает с порядком исходной передаточной функции.

### 7.2.6. ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Обратное Z-преобразование дает возможность перейти от изображения  $y(z)$  к значениям  $y(kT)$  только в фиксированные моменты времени, соответствующие шагу квантования. При этом обратное Z-преобразование не дает ответа на вопрос, как изменяется значение  $y(t)$  между этими точками (рис. 7.11).

Предположим, что изображение исследуемого сигнала  $y(z)$  известно и имеет вид правильной дроби. Разделим числитель этой дроби на знаменатель и получим бесконечный ряд:

$$y(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_k z^{-k} + \dots$$

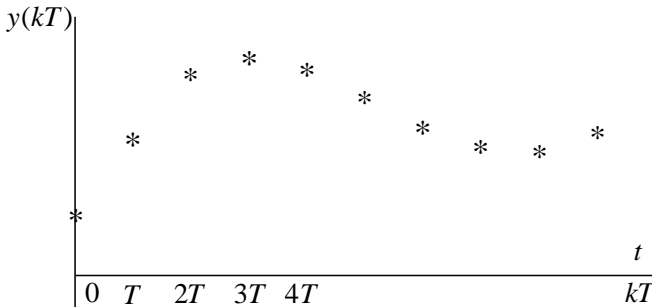


Рис. 7.11. Пример восстановленного сигнала

Запишем изображение для исследуемого сигнала по аналогии с полученным ранее изображением для управляющего сигнала (7.8):

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k}.$$

Сравнивая два последних равенства, получим:

$$y(0) = c_0, \quad y(1) = c_1, \quad \dots, \quad y(k) = c_k, \quad \dots$$

Обратное Z-преобразование позволяет получить оригинал по изображению, но только в фиксированные моменты времени.

### 7.2.7. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим некоторые правила преобразования структурных схем линейных дискретных систем.

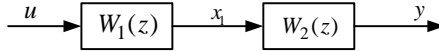


Рис. 7.12. Последовательное соединение звеньев

Правило: передаточная функция последовательного соединения звеньев (рис. 7.12) равна произведению передаточных функций этих звеньев

$$W(z) = W_1(z) W_2(z).$$

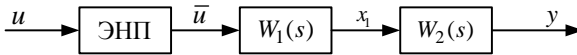


Рис. 7.13. Последовательное соединение двух непрерывных звеньев

Правило: передаточная функция последовательного соединения двух непрерывных звеньев, не разделенных экстраполятором (рис. 7.13), равна  $Z$ -преобразованию произведения передаточных функций этих звеньев

$$W(z) = 1 - z^{-1} Z \left\{ \frac{W_1(s)W_2(s)}{s} \right\}.$$

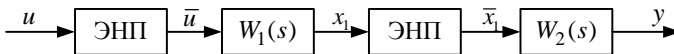


Рис. 7.14. Последовательное соединение двух непрерывных звеньев, разделенных экстраполяторами

Правило: передаточная функция последовательного соединения двух непрерывных звеньев, разделенных экстраполятором (рис. 7.14), равна произведению их дискретных передаточных функций

$$W(z) = W_1(z)W_2(z),$$

экстраполяторы должны работать синхронно и синфазно.

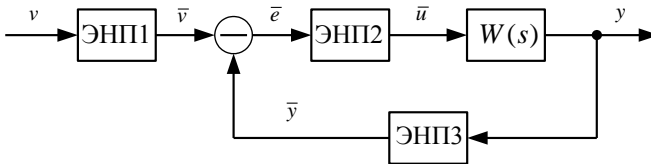


Рис. 7.15. Звено, охваченное обратной связью

$$W(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}.$$

Правило: передаточная функция системы с отрицательной обратной связью (рис. 7.15) равна дроби, в числителе которой стоит дискретная передаточная функция звена, охваченного обратной связью  $W(z)$ , а знаменатель представляет собой сумму единицы и той же передаточной функции.

### 7.2.8. СТРУКТУРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В соответствии с разностным уравнением объекта в матричной форме (7.2) можно построить его структурную схему (рис. 7.16).

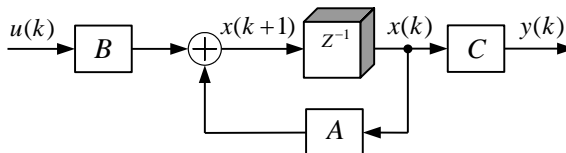


Рис. 7.16. Структурная схема объекта, соответствующая матричным уравнениям

Запишем систему уравнений (7.2) для одноканального объекта в скалярной форме

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1u(k), \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2u(k), \\ \dots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_nu(k), \\ y(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + \dots + c_nx_n(k). \end{cases} \quad (7.15)$$

Системе уравнений (7.15) соответствует структурная схема, представленная на рис. 7.17.

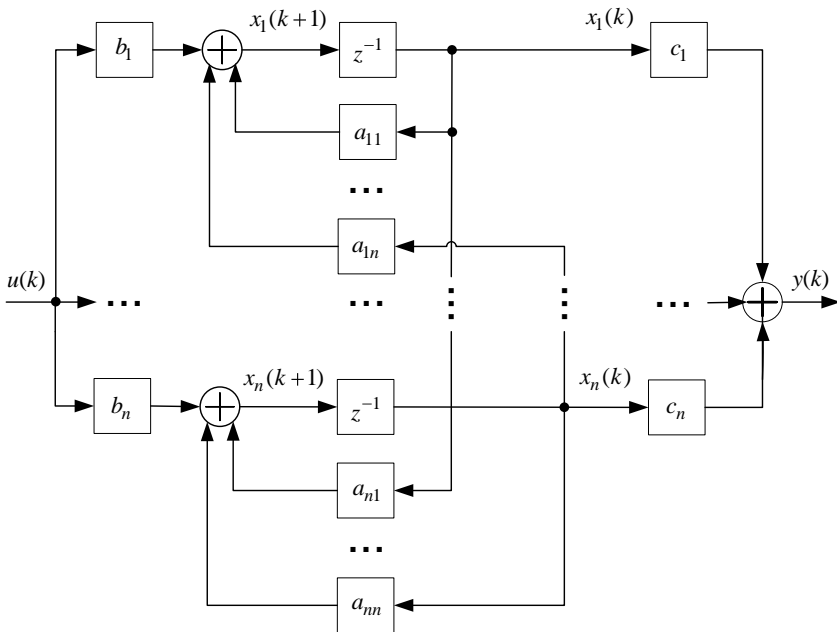


Рис. 7.17. Структурная схема, соответствующая уравнениям (7.15)

Подобную структурную схему можно построить для многоканального объекта. Для этого необходимо систему уравнений (7.2) записать в скалярной форме, аналогичной (7.15).

### 7.2.9. ПЕРЕХОД ОТ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ К СТРУКТУРНЫМ СХЕМАМ

Рассмотрим первый вариант перехода к структурной схеме от передаточной функции

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}. \quad (7.16)$$

Передаточную функцию (7.16) представим в виде произведения двух передаточных функций

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{A(z)} B(z) = \\ &= \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Введем новую переменную  $\varepsilon(z)$ , как показано на рис. 7.18:

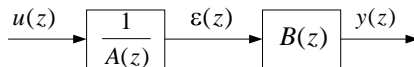


Рис. 7.18. Структурное представление системы (7.17)

Для каждого из звеньев запишем операторное уравнение

$$\begin{cases} z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \varepsilon(z) = u(z), \\ y(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0 \varepsilon(z). \end{cases} \quad (7.18)$$

От операторной формы уравнений (7.18) перейдем к их записи в дискретном времени:

$$\begin{cases} \varepsilon(k+n) = u(k) - a_0\varepsilon(k) - a_1\varepsilon(k+1) - \dots - a_{n-1}\varepsilon(k+n-1), \\ y(k) = b_{n-1}\varepsilon(k+n-1) + b_{n-2}\varepsilon(k+n-2) + \dots + b_1\varepsilon(k+1) + b_0\varepsilon(k). \end{cases} \quad (7.19)$$

По уравнениям (7.19) построена структурная схема рис. 7.19. Полученная структурная схема позволяет перейти к модели системы



в переменных состояния. Выход каждого звена задержки обозначим как переменную состояния

$$x_1(k) = \varepsilon(k), \quad x_2(k) = \varepsilon(k+1), \dots, x_n(k) = \varepsilon(k+n-1),$$

это позволяет представить разностные уравнения (7.19) в виде

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k), \\ \dots \\ x_n(k+1) = -a_0x_1(k) - a_1x_2(k) - \dots - a_{n-1}x_n(k) + u(k), \\ y(k) = b_0x_1(k) + b_1x_2(k) + \dots + b_{n-2}x_{n-1}(k) + b_{n-1}x_n(k). \end{cases} \quad (7.20)$$

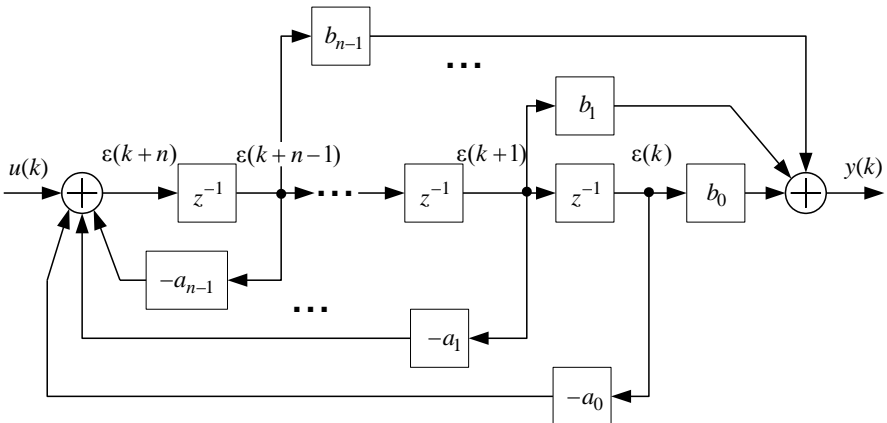


Рис. 7.19. Структурное представление передаточной функции в соответствии с системой уравнений (7.19)

Систему разностных уравнений (7.20) можно представить в векторно-матричной форме (7.2) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1} \quad .$$

Модель системы в переменных состояния (7.20) будем называть «прямой» формой (в литературе встречается другое название – «первая каноническая форма»).

Рассмотрим второй вариант перехода к структурной схеме от передаточной функции (7.16), для чего запишем соответствующее ей разностное уравнение в операторной форме

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 y(z) = b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0 u(z). \quad (7.21)$$

Перейдем к записи уравнения (7.21) в дискретном времени:

$$\begin{aligned} y(k+n) = & -a_0y(k) + b_0u(k) - a_1y(k+1) + b_1u(k+1) - \dots \\ & \dots - a_{n-1}y(k+n-1) + b_{n-1}u(k+n-1). \end{aligned} \quad (7.22)$$

В уравнении (7.22) сдвинем аргумент на один шаг назад:

$$\begin{aligned} y(k+n-1) = & -a_0y(k-1) + b_0u(k-1) - a_1y(k) + b_1u(k) - \dots \\ & \dots - a_{n-1}y(k+n-2) + b_{n-1}u(k+n-2) \end{aligned}$$

и введем новую переменную  $x_1(k) = -a_0y(k-1) + b_0u(k-1)$ , тогда

$$\begin{aligned} y(k+n-1) = & x_1(k) - a_1y(k) + b_1u(k) - \dots \\ & \dots - a_{n-1}y(k+n-2) + b_{n-1}u(k+n-2). \end{aligned}$$

Процедуру сдвига аргумента и замены переменной выполним  $n$  раз. В новом базисе разностное уравнение (7.22) можно представить в векторно-матричной форме

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_0x_n(k) + b_0u(k), \\ \dots \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) - a_{n-1}x_n(k) + b_{n-1}u(k), \\ y(k) = x_n(k) \end{cases} \quad (7.23)$$

с соответствующими матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 .$$

Модель системы в переменных состояния (7.23) будем называть «транспонированной» формой.

По уравнениям (7.23) построена структурная схема (рис. 7.20).

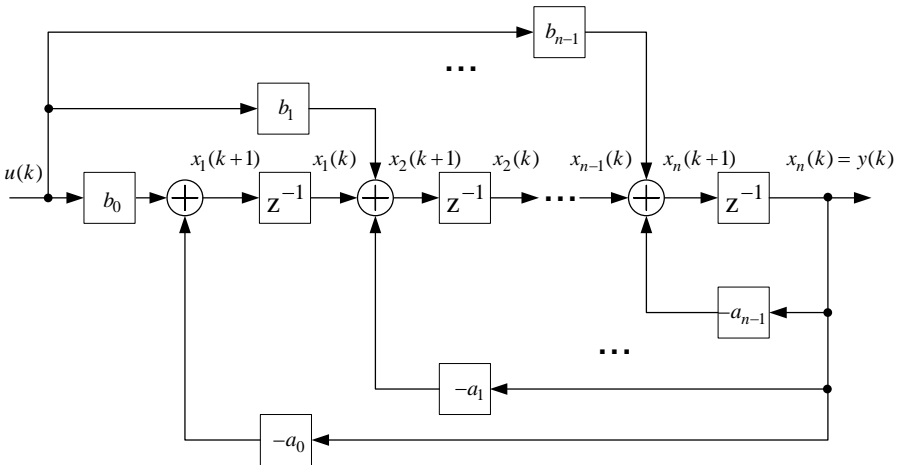


Рис. 7.20. Структурное представление передаточной функции в соответствии с системой уравнений (7.23)

### ПРИМЕР 7.6

Задано линейное разностное уравнение, необходимо перейти к системе разностных уравнений

$$0,5y(k+2) + 1,2y(k+1) + 1,5y(k) = 0,4u(k+1) + u(k) .$$

Исходное разностное уравнение приведем к нормированному виду, для этого коэффициент перед  $y(k+2)$  должен быть равен единице:

$$y(k+2) + 2,4y(k+1) + 3y(k) = 0,8u(k+1) + 2u(k),$$

далее разрешим это уравнение относительно  $y(k+2)$ :

$$y(k+2) = -2,4y(k+1) - 3y(k) + 0,8u(k+1) + 2u(k).$$

Выполним сдвиг аргумента в последнем уравнении назад на один шаг:

$$y(k+1) = -3y(k-1) + 2u(k-1) - 2,4y(k) + 0,8u(k),$$

введем новую переменную  $x_1(k) = -3y(k-1) + 2u(k-1)$ , тогда

$$y(k+1) = x_1(k) - 2,4y(k) + 0,8u(k).$$

Процедуру сдвига аргумента и замены переменной выполним для последнего уравнения еще раз:

$$y(k) = x_1(k-1) - 2,4y(k-1) + 0,8u(k-1),$$

$$y(k) = x_2(k).$$

Запишем систему разностных уравнений для новых переменных  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -3x_2(k) + 2u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k) - 2,4x_2(k) + 0,8u(k), \\ y(k) = x_2(k). \end{cases}$$

В итоге получаем систему разностных уравнений в «транспонированной» форме.

### 7.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Свойство устойчивости для линейных импульсных систем, как и для линейных непрерывных, определяется только ее параметрами и означает, что выходной сигнал будет ограниченным при ограниченном входном воздействии, независимо от начальных условий.

**Устойчивость** – свойство объекта или системы с течением времени приходит в равновесное состояние.

**Равновесное состояние** – такое состояние, в котором все переменные состояния неизменны.

Запишем исходную систему разностных уравнений для объекта управления:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (7.24)$$

полагаем при этом, что управляющее воздействие неизменно и ограничено:

$$u(0) = u(1) = \dots = u(k+n) = u = \text{const}.$$

Поскольку в состоянии равновесия все переменные состояния в выражении (7.24) неизменны, уравнение равновесия принимает вид

$$x^0 = Ax^0 + Bu, \quad (7.25)$$

где  $x^0$  – положение равновесия.

Введем новые координаты  $\Delta(k) = x(k) - x^0$  – отклонение от положения равновесия. Пример движения системы в отклонениях к положению равновесия приведен на рис. 7.21.

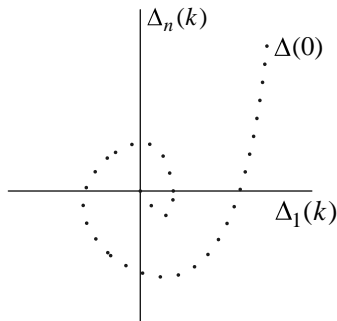


Рис. 7.21. Пример движения системы в отклонениях к положению равновесия

Преобразуем исходное уравнение (7.24) в уравнение в отклонениях от положения равновесия:

$$x(k) = \Delta(k) + x^0 \Rightarrow x(k+1) = \Delta(k+1) + x^0,$$

$$\Delta(k+1) + x^0 = A \Delta(k) + x^0 + BU^0,$$

$$\Delta(k+1) = A\Delta(k) + Ax^0 + BU^0 - x^0.$$

Последняя скобка равна нулю в состоянии равновесия в соответствии с (7.25), поэтому

$$\Delta(k+1) = A\Delta(k). \quad (7.26)$$

Как видим, разностное уравнение объекта в отклонениях от положения равновесия (7.26) получилось однородным, не зависящим от управляющего воздействия, следовательно, переходные процессы по  $\Delta$  порождаются только ненулевыми начальными условиями.

### 7.3.1. ОБЩЕЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

**Линейная импульсная система (7.26) является устойчивой, если для ее процессов выполняется условие**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(k) = 0. \quad (7.27)$$

**Утверждение:** для того чтобы линейная импульсная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы модули собственных чисел матрицы  $A$  были меньше единицы:

$$|z_i| < 1; \quad i = \overline{1, n},$$

где  $z_i$  – собственные числа матрицы  $A$  (корни характеристического уравнения).

Докажем это утверждение, для чего запишем характеристическое уравнение объекта

$$A(z) = \det(zI - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0.$$

Будем искать частные решения разностного уравнения в отклонениях от положения равновесия (7.26) в виде

$$\Delta_i(k) = z_i^k \gamma_i, \quad (7.28)$$

где  $z_i$  – корень характеристического уравнения;  $\gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \dots \\ \gamma_{in} \end{bmatrix}$  – соответствующий этому корню *собственный вектор*.

Общее решение разностного уравнения (7.26) представляет собой линейную комбинацию частных решений (7.28) и имеет вид

$$\Delta(k) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k \gamma_i. \quad (7.29)$$

Как следует из анализа выражения (7.29), для выполнения предельного соотношения (7.27) необходимо, чтобы каждая компонента общего решения разностного уравнения стремилась к нулю, тогда и вся сумма будет стремиться к нулю.

Если все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_i^k = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

и, следовательно, выполняется соотношение (7.27), что и требовалось доказать.

Для нахождения собственных векторов  $\gamma_i$  частное решение (7.28) подставим в однородное разностное уравнение (7.26):

$$z_i^{k+1} \gamma_i = A z_i^k \gamma_i,$$

из которого следует

$$(z_i I - A) \gamma_i = 0. \quad (7.30)$$

Поскольку в выражении (7.30) матрица в круглых скобках вырожденная (так как  $z_i$  – собственное число матрицы  $A$ ), для вектора  $\gamma_i$  существует бесконечное множество решений. Для нахождения любого из них произвольно задают одну из компонент этого вектора. Из системы исходных уравнений исключают зависимое уравнение, остальные компоненты вектора  $\gamma_i$  находят по сформированной системе уравнений  $(n - 1)$ -го порядка.

Для нахождения неизвестных констант  $C_i$  используют начальные условия:

$$\Delta(0) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^0 \gamma_i.$$

Это система из  $n$  уравнений для нахождения констант  $C_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

### 7.3.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБЩЕГО УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Изобразим плоскость корней линейной импульсной системы (рис. 7.22).

Очевидно, линейная импульсная система (ЛИС) устойчива, если все ее корни лежат в круге единичного радиуса.

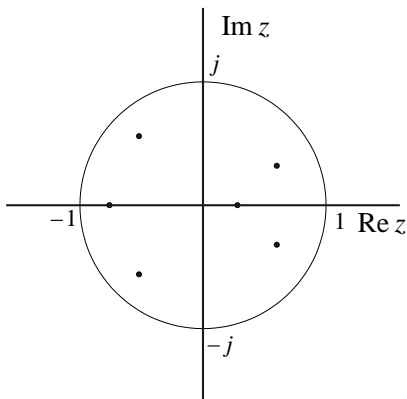


Рис 7.22. Область устойчивости  
в пространстве корней

Процедура анализа устойчивости линейной импульсной системы:

- 1) записать характеристическое уравнение  $\det(zI - A) = 0$ ;
- 2) найти корни  $z_i$ .
- 3) проанализировать  $z_i$  по критерию  $|z_i| < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

### 7.3.3. БИЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для анализа устойчивости ЛИС можно взять уже известные критерии из теории линейных непрерывных систем (см. главу 4). Для этого необходимо воспользоваться преобразованием, отображающим круг единичного радиуса плоскости корней ЛИС в левую полуплоскость комплексной плоскости псевдокорней  $\omega$  (рис. 7.23).



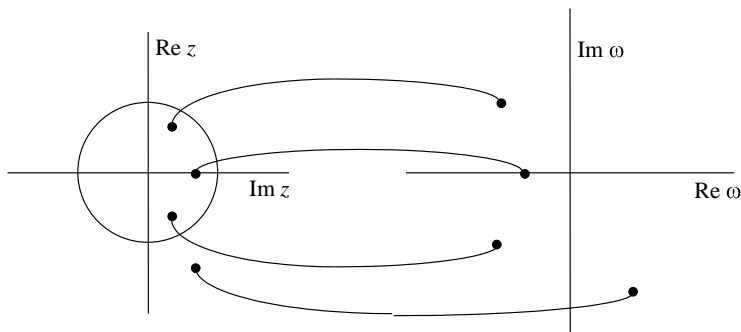


Рис. 7.23. Отображение корней на плоскость псевдокорней

Аналитически такое преобразование выглядит следующим образом:

$$z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega}, \quad \omega = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

**Процедура использования билинейного преобразования:**

1) записать характеристическое уравнение линейной импульсной системы

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0;$$

2) заменить в этом уравнении  $z$  на  $\omega$ :

$$\left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega}\right)^{n-1} + \dots + a_1\frac{1 + \omega}{1 - \omega} + a_0 = 0;$$

3) привести полученное уравнение к общему знаменателю и приравнять числитель нулю:

$$\omega^n + \bar{a}_{n-1}\omega^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\omega + \bar{a}_0 = 0;$$

4) к полученному уравнению применить критерий Гурвица (см. подразд. 4.2.1).

**ПРИМЕР 7.7**

Модель дискретной системы задана линейным разностным уравнением

$$4y(k+2) - y(k) = 10u(k).$$

Необходимо оценить устойчивость системы.

**Р е ш е н и е**

*Способ 1.* Корни характеристического уравнения системы должны удовлетворять условию  $|z_i| < 1$ . Характеристическое уравнение заданной системы имеет вид  $z^2 - 0,25 = 0$ , его корни  $z_{1,2} = |\pm 0,5| < 1$  удовлетворяют общему условию устойчивости, следовательно, дискретная система устойчива.

*Способ 2.* Выполним билинейное преобразование  $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$  для характеристического уравнения системы, к полученному уравнению применим критерий Гурвица:

$$\begin{aligned} z^2 - 0,25 = 0 &\Rightarrow \left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^2 - 0,25 = 0 \Rightarrow 1 + \omega^2 - 0,25(1-\omega)^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0,75\omega^2 + 2,5\omega + 0,75 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты в последнем уравнении положительны, в соответствии с критерием Гурвица система устойчива.

**7.3.4. УТВЕРЖДЕНИЕ КОТЕЛЬНИКОВА–ШЕННОНА**

Запишем изображение по Лапласу решетчатого сигнала  $x^*(t)$ :

$$L x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} = x^*(s).$$

Частотную характеристику решетчатого сигнала получаем заменой  $s = j\omega$ :

$$x^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}. \quad (7.31)$$

Учтем, что экспонента с мнимым показателем степени – периодическая функция:

$$e^{j\omega T} = \cos T\omega + j \sin T\omega = \cos(T\omega + \gamma \cdot 2\pi) + j \sin(T\omega + \gamma \cdot 2\pi),$$

$$\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Введем новую переменную  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  – шаг квантования, тогда последнее выражение примет вид

$$e^{j\omega T} = \cos(T\omega + \gamma T\omega_0) + j \sin(T\omega + \gamma T\omega_0) = e^{jT(\omega + \gamma\omega_0)}. \quad (7.32)$$

Выражение (7.32) позволяет сделать вывод, что частотная характеристика решетчатого сигнала – периодическая функция (рис. 7.24) с периодом, равным  $\omega_0$ :

$$x^*(j\omega) = x^*(j(\omega + \gamma\omega_0)).$$

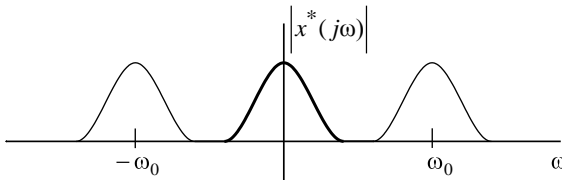


Рис. 7.24. Спектральная характеристика решетчатого сигнала

Найдем частотную характеристику исходного непрерывного сигнала:

$$x(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (7.33)$$

Заменяем точное интегральное соотношение (7.33) на приближенное в виде суммы:

$$x(j\omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t)e^{-j\omega k\Delta t} \Delta t;$$

если шаг квантования достаточно мал, то можно  $\Delta t$  заменить на  $T$ :

$$x(j\omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT} T. \quad (7.34)$$

Спектральная характеристика решетчатого сигнала  $x^*(j\omega)$  (7.31) повторяет спектральную характеристику непрерывного  $x(j\omega)$  (7.34) с точностью до константы, но является периодической с периодом  $\omega_0$  (рис. 7.24).

Будем считать, что спектр непрерывного сигнала ограничен:

$$\begin{aligned} x(j\omega) &\neq 0, & -\omega_{\max} < \omega < \omega_{\max}; \\ x(j\omega) &= 0, & \omega \geq \omega_{\max}, \quad \omega \leq -\omega_{\max}. \end{aligned}$$

Спектральные характеристики решетчатых сигналов для различных соотношений частот  $\omega_0$  и  $\omega_{\max}$  приведены на рис. 7.25.

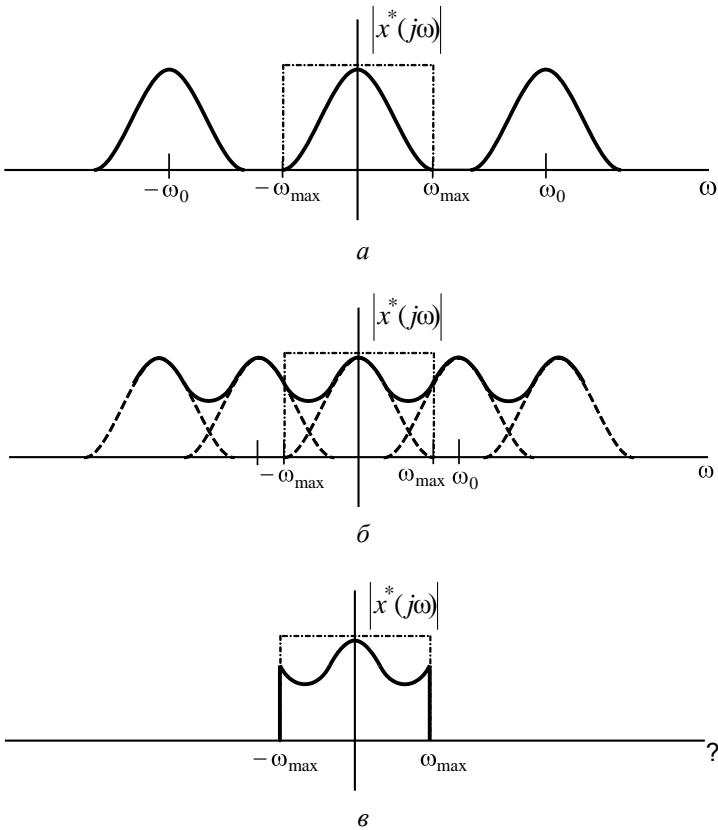


Рис. 7.25. Частотные характеристики решетчатого сигнала

На рис. 7.25, *a* представлен случай, когда  $\omega_{\max} < \omega_0/2$ , а на рис. 7.25, *б* – соотношение между этими частотами иное:  $\omega_{\max} > \omega_0/2$ .

Поставим задачу восстановить непрерывный сигнал из решетчатого. Эту задачу можно решить с помощью идеального фильтра (ИФ) с прямоугольной частотной характеристикой, изображенной на рис. 7.25 штрихпунктирной линией. Схема такого эксперимента иллюстрируется структурой, приведенной на рис. 7.26.

Как видим, при  $\omega_{\max} < \omega_0/2$  (рис. 7.25, *a*) это сделать удастся. В случае, когда  $\omega_{\max} > \omega_0/2$  (рис. 7.25, *б*), это невозможно, что подтверждает рис. 7.25, *в*, на котором показана спектральная характеристика сигнала, восстановленного с помощью ИФ.

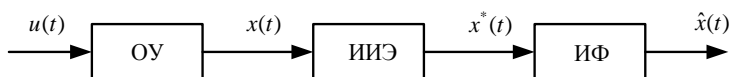


Рис. 7.26. Схема восстановления непрерывного сигнала из решетчатого

Таким образом, можно сделать вывод: для того чтобы восстановить непрерывный сигнал из квантованного с помощью идеального фильтра (ИФ) с прямоугольной частотной характеристикой, необходимо выполнить соотношения

$$\omega_0 \geq 2\omega_{\max} \quad \text{или} \quad T \leq \frac{1}{2f_{\max}}. \quad (7.35)$$

Последнее соотношение и есть формулировка утверждения Котельникова–Шеннона.

Если неравенство (7.35) выполняется, то можно говорить о том, что шаг квантования достаточно мал. При таком шаге квантования выход объекта будет «гладким» несмотря на ступенчатый вид управляющего воздействия.

### 7.3.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАСТИНА

Это преобразование позволяет получить дискретную передаточную функцию линейного объекта из его исходной непрерывной передаточной функции:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

При малом шаге квантования справедлива следующая замена переменной:

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (7.36)$$

### Обоснования

1. Запишем аналитическое выражение, связывающее операторы  $p$  и  $z$ , а затем разложим логарифм в ряд Тейлора:

$$z = e^{pT}, \quad p = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots \right).$$

В последнем выражении отбросим все члены ряда, кроме первого.

2. Воспользуемся методом трапеций для аппроксимации процедуры интегрирования (рис. 7.27).

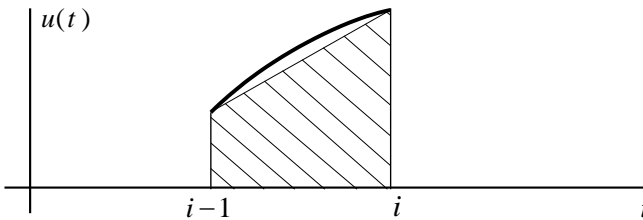


Рис. 7.27. Иллюстрация метода трапеций для аппроксимации процедуры интегрирования

Запишем значение интеграла, найденное по методу трапеций для моментов времени  $k$  и  $k-1$ , соответственно это будут функции  $y(k)$  и  $y(k-1)$ :

$$y(k) = T \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} u(i) + u(i-1),$$

$$y(k-1) = T \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} u(i) + u(i-1).$$

Для того чтобы избавиться от суммы, вычтем одно из другого и перепишем полученное выражение в операторной форме:

$$y(k) - y(k-1) = \frac{T}{2} u(k) + u(k-1),$$

$$y(z) - y(z)z^{-1} = \frac{T}{2}(u(z) + u(z)z^{-1}).$$

Найдем отношение изображений (напомним, что  $y$  – это интеграл от  $u$ ):

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \iff \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

### ПРИМЕР 7.8

Модель непрерывной динамической системы задана передаточной функцией

$$W(p) = \frac{5}{p+1}.$$

Используя преобразование Тастина, найти дискретную модель объекта, записать ее передаточную функцию. Шаг дискретизации по времени  $T = 0,1$  с.

В соответствии с выражением (7.36) при заданном  $T$  найдем связь между операторами:

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 20 \frac{z-1}{z+1};$$

подставим найденное значение оператора  $p$  в заданную передаточную функцию:

$$W(z) = \frac{5}{20 \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{5z+5}{21z-19} = \frac{0,2381z+0,2381}{z-0,9048}.$$

**Замечание.** Преобразование Тастина можно использовать только для анализа процессов в линейных импульсных системах и при достаточно малом шаге квантования по времени  $T$ , корни знаменателя при этом воспроизводятся достаточно точно, но порядок числителя при таком переходе всегда получается равным  $n$  независимо от свойств непрерывного объекта.

## 7.4. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

### 7.4.1. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА

Практика проектирования импульсных систем предполагает две основные задачи расчета процессов.

**Задача 1 – анализ свободных движений в системе** (анализируется однородное разностное уравнение):

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (7.37)$$

при заданных начальных условиях

$$x(0) = x^0.$$

Свободные движения вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax^0, \\ &\dots \\ x(k) &= Ax(k-1) = A^k x^0. \end{aligned}$$

В результате для любого заданного момента времени  $k$  при заданных начальных условиях можно найти значение вектора состояния

$$x(k) = A^k x^0. \quad (7.38)$$

**Задача 2 – анализ полных движений в системе:**

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (7.39)$$

при известных начальных условиях и заданной последовательности управляющих воздействий:

$$x(0) = x^0, \quad u(0), u(1), \dots, u(k-1).$$



Полные процессы рассчитываются аналогично свободным, на основе исходного разностного уравнения (7.39):

$$\begin{aligned}x(1) &= Ax^0 + Bu(0), \\x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x^0 + ABu(0) + Bu(1), \\&\dots\end{aligned}$$

$$x(k) = A^k x^0 + A^{k-1} Bu(0) + A^{k-2} Bu(1) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1).$$

Как видим, полные процессы складываются из двух компонент: первая – свободные движения, определяемые начальными условиями; вторая – вынужденные движения, определяемые последовательностью управляющих воздействий.

#### ПРИМЕР 7.9

Дискретная система задана линейным разностным уравнением

$$\begin{aligned}y(k+3) - 1,25y(k+2) + 0,75y(k+1) + 0,125y(k) = \\= 0,75u(k+1) + 0,5u(k).\end{aligned}$$

Найти реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях для  $k = 0, \dots, 5$ .

Сдвинем аргумент в исходном разностном уравнении

$$\begin{aligned}y(k) = 1,25y(k-1) - 0,75y(k-2) - 0,125y(k-3) + \\+ 0,75u(k-2) + 0,5u(k-3).\end{aligned}$$

Заданы нулевые начальные условия, это означает, что

$$y(-3) = 0, \quad y(-2) = 0, \quad y(-1) = 0.$$

Управляющее воздействие подается на вход объекта в момент времени  $k = 0$ , до этого момента оно равно нулю. Найдем значения  $y(i)$ ,  $i = \overline{0, 5}$ .

$$k = 0: \quad y(0) = 1,25y(-1) - 0,75y(-2) - 0,125y(-3) + 0,75u(-2) + 0,5u(-3) = 0.$$

$$k = 1: \quad y(1) = 1,25y(0) - 0,75y(-1) - 0,125y(-2) + 0,75u(-1) + 0,5u(-2) = 0.$$

$$k = 2: \quad y(2) = 1,25y(1) - 0,75y(0) - 0,125y(-1) + 0,75u(0) + 0,5u(-1) = 0,75.$$

$$k = 3: \quad y(3) = 1,25y(2) - 0,75y(1) - 0,125y(0) + 0,75u(1) + 0,5u(0) = 2,188.$$

$$k = 4: \quad y(4) = 1,25y(3) - 0,75y(2) - 0,125y(1) + 0,75u(2) + 0,5u(1) = 3,422.$$

$$k = 5: \quad y(5) = 1,25y(4) - 0,75y(3) - 0,125y(2) + 0,75u(3) + 0,5u(2) = 3,793.$$

На рис. 7.28 показан вид полученного процесса.

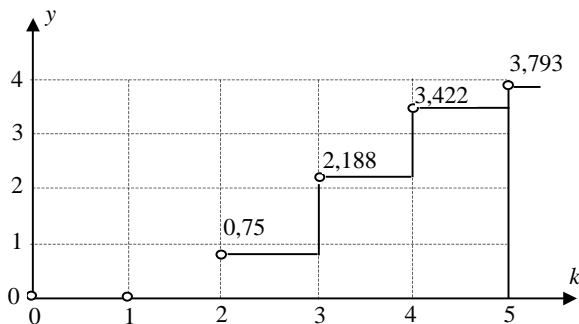


Рис. 7.28. Вид процесса, полученного в примере 7.9

#### 7.4.2. ПРОЦЕССЫ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

В импульсных системах имеет смысл говорить о процессах предельного быстродействия и для этого нетрудно получить соответствующие формальные условия.

Рассмотрим процессы в линейной импульсной системе, которые описываются разностным уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k).$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\det(zI - A) = 0 \Rightarrow z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0.$$

Оказывается, в линейных импульсных системах процессы могут заканчиваться не более чем за  $n$  шагов, где  $n$  – порядок системы. Такие процессы называют процессами минимальной длительности.

**Утверждение:** для того чтобы процессы в системе заканчивались не более чем за  $n$  шагов, все собственные числа матрицы  $A$  должны быть равны нулю:

$$z_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство данного утверждения основано на следующей теореме.

**Теорема Келли–Гамильтона.** Матрица  $A$  удовлетворяет собственному характеристическому уравнению

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = [0].$$

Если все собственные числа равны нулю, то характеристическое уравнение системы принимает вид

$$z^n = 0.$$

На основании теоремы Келли–Гамильтона можно записать:

$$A^n = 0,$$

из чего следует в соответствии с выражением (7.38)

$$x(n) = A^n x^0 = [0].$$

Очевидно, что все последующие значения вектора состояния также будут равны нулю.

## 7.5. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

### 7.5.1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА

Объект управления, для которого будем рассматривать синтез цифрового регулятора, описывается системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + M(k), \end{cases}$$

где  $M(k)$  – возмущение, приложенное к выходу объекта, что при синтезе является наиболее неблагоприятным случаем.

После окончания переходного процесса выход объекта должен повторять входное задающее воздействие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = v. \quad (7.40)$$

В некоторых системах допускается воспроизводить входное задающее воздействие с ошибкой, но величина ошибки должна быть не больше заданной  $\Delta^0$ :

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= v - y(k) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(k) &= \Delta^0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Кроме требований статики (7.40), (7.41), предъявляются требования и к динамике системы. Время переходного процесса должно быть не более заданного:

$$t_{\text{пн}} \leq t_3.$$

Вид (качество) переходного процесса должен соответствовать предписанному, при этом часто задается величина перерегулирования (рис. 7.29):

$$\sigma = \frac{y_{\text{max}} - y_{\text{уст}}}{y_{\text{уст}}} < \sigma_3.$$

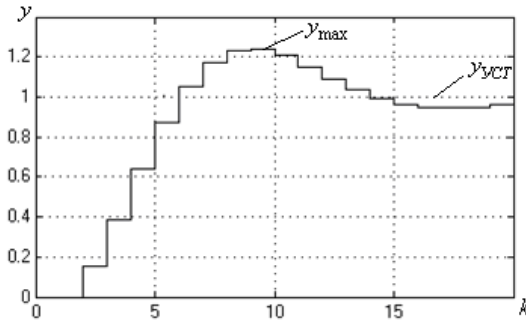


Рис. 7.29. Примерный вид переходного процесса в синтезируемой системе

По заданным требованиям к системе необходимо определить структуру и параметры регулятора.

До начала процедуры синтеза следует проверить управляемость и наблюдаемость объекта. Эти понятия мы уже ввели для непрерывных систем (см. главу 5) и здесь будем использовать те же обозначения. Убедимся, однако, что доказывать критерии для импульсных систем много проще.

### 7.5.2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим условие управляемости для объекта вида

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (7.42)$$

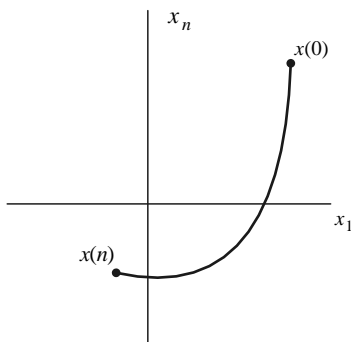


Рис. 7.30. Движение изображающей точки в пространстве состояний

**Определение:** объект (7.42) управляем, если существует ограниченное управляющее воздействие, которое на конечном интервале времени переводит объект из заданного начального состояния  $x(0)$  в заданное конечное состояние  $x(n)$  (рис. 7.30), т.е. существует последовательность  $u(0), u(1), \dots, u(n-1)$ .

Рассмотрим вначале задачу анализа управляемости одноканального объекта:

$$A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times 1}.$$

Сформируем матрицу, которую называют матрицей управляемости

$$U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]. \quad (7.43)$$

Для одноканального объекта матрица управляемости является квадратной:

$$U \in R^{n \times n}.$$

**Критерий управляемости одноканального объекта.** Одноканальный объект (7.42) называется *управляемым*, если матрица  $U$  невырожденная:

$$\det\{U\} \neq 0.$$

**Доказательство.** В соответствии с разностным уравнением объекта (7.42) можно записать:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0), \\ x(n) &= A^n x(0) + A^{n-1} Bu(0) + \dots + Bu(n-1). \end{aligned}$$

Возьмем последнее уравнение из этой цепочки и преобразуем его:

$$x(n) - A^n x(0) = \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \dots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Как видим, последовательность управляющих воздействий, переводящих одноканальный объект из заданного начального состояния в заданное конечное, можно найти следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u(n-1) \\ \dots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} x(n) - A^n x(0) \end{bmatrix},$$

откуда и следует требование невырожденности матрицы  $U$ .

Рассмотрим теперь критерий управляемости для многоканального объекта. Размерность матриц объекта и управления:

$$A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times m}, \quad u \in R^m.$$

Вид матрицы управляемости для многоканального объекта тот же, что и для одноканального (7.43), но ее размерность иная:

$$U \in R^{n \times (n \times m)}.$$

**Критерий управляемости многоканального объекта.** Многоканальный объект (7.42) называется *управляемым*, если матрица управляемости имеет полный ранг:

$$\text{rank}\{U\} = n.$$

Из линейной алгебры известно, что матрица  $U$  имеет полный ранг, если из нее можно выбрать  $n$  линейно независимых столбцов. Это, в свою очередь, означает, что многоканальный объект из заданного начального состояния в заданное конечное состояние можно перевести не более чем за  $n$  шагов.

Определить, имеет ли матрица полный ранг, можно по соотношению

$$\det\{UU^T\} \neq 0.$$

Управляемость объекта является условием разрешимости задачи синтеза.

#### ПРИМЕР 7.10

Проверить свойство управляемости объекта, заданного системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0,3x_1(k) + 0,2x_2(k) + 0,4u(k), \\ x_2(k+1) = 0 \cdot x_1(k) - 0,1x_2(k) + 0,5u(k). \end{cases}$$

Вычислить управление, которое переводит объект из начального состояния  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -1$  в конечное состояние  $x_1(T) = 1$ ,  $x_2(T) = 1$ , и построить траекторию движения изображающей точки на фазовой плоскости.

По заданным уравнениям объекта запишем его матрицы  $A$ ,  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad AB = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,02 \\ -0,05 \end{bmatrix}.$$

Используя матрицы объекта, найдем матрицу управляемости  $U$  и вычислим

ее детерминант:  $U = B \quad AB = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,02 \\ 0,5 & -0,05 \end{bmatrix}; \quad \det U = -0,01.$

Поскольку  $\det U \neq 0$ , объект управляем.

Найдем последовательность управляющих воздействий, переводящих объект из заданного начального состояния в заданное конечное:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 50 & -40 \end{bmatrix}; U^{-1}(x(2) - A^2 x(0)) = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 0,09 & -0,08 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 50 & -40 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,09 & -0,08 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2,58 \\ 5,6 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдем траекторию движения объекта

$$\begin{cases} x_1(1) = -0,3 \cdot 0 + 0,2(-1) + 0,4 \cdot 5,6 = 2,04, \\ x_2(1) = -0,1(-1) + 0,5 \cdot 5,6 = 2,9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(2) = -0,3 \cdot 2,04 + 0,2 \cdot 2,9 + 0,4 \cdot 2,58 = 1, \\ x_2(2) = -0,1 \cdot 2,9 + 0,5 \cdot 2,58 = 1. \end{cases}$$

Как видим, на втором шаге объект приходит в заданное конечное состояние.

### 7.5.3. НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Будем анализировать наблюдаемость линейного дискретного объекта, математическая модель которого представлена системой разностных уравнений (7.42)

Пусть известны последовательность измеренных значений выхода  $y(k)$  и последовательность управляющих воздействий  $u(k)$ :

$$\begin{cases} y(0), y(1), \dots, y(n-1) \\ u(0), u(1), \dots, u(n-1) \end{cases},$$

по этим данным необходимо найти вектор состояния  $x(k)$ .

**Определение.** Объект *наблюдаем*, если по процессу  $y(k)$  при известной последовательности управляющих воздействий  $u(k)$  можно вычислить процесс  $x(k)$ .

Рассмотрим процедуру анализа управляемости для одноканального объекта, размерность матриц которого

$$A \in R^{n \times n}, \quad C \in R^{1 \times n}.$$



Матрица наблюдаемости для одноканального объекта квадратная и имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}. \quad (7.44)$$

**Критерий наблюдаемости одноканального объекта.** Одноканальный объект (7.42) называется *наблюдаемым*, если матрица  $N$  невырожденная:

$$\det N \neq 0.$$

**Доказательство.** Воспользуемся уравнением выхода объекта (7.42) и сформируем систему уравнений:

$$\begin{cases} y(0) = Cx(0), \\ y(1) = Cx(1) = C(Ax(0) + Bu(0)), \\ \dots \\ y(n-1) = CA^{n-1}x(0) + CA^{n-2}Bu(0) + \dots + CBu(n-2). \end{cases} \quad (7.45)$$

Здесь неизвестным является  $x(0)$ , значения управления  $u(k)$  известны, значения выходной величины  $y(k)$  измеряемы. Запишем систему уравнений (7.45) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ CBu(0) \\ \dots \\ CA^{n-2}Bu(0) + \dots + CBu(n-2) \end{bmatrix}.$$

Из последней системы уравнений выразим  $x(0)$ :

$$x(0) = N^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix} - N^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ CBu(0) \\ \dots \\ CA^{n-2}Bu(0) + \dots + CBu(n-2) \end{bmatrix}.$$

Как видим, решение для  $x(0)$  существует в том случае, если матрица  $N$  невырожденная. Для оценки вектора состояния  $x(0)$  придется набирать информацию о выходе объекта на  $(n-1)$ -м шаге от  $y(0)$  до  $y(n-1)$  и сохранить значения управления от  $u(0)$  до  $u(n-2)$ . Таким образом, данная процедура дает возможность оценивать вектор состояния объекта с запаздыванием  $T_3$ , величина которого составляет

$$T_3 = T(n-1),$$

где  $T$  – шаг квантования;  $n$  – порядок объекта.

Рассмотрим критерий наблюдаемости для многоканального объекта. Размерность матриц объекта:

$$A \in R^{n \times n}, \quad C \in R^{m \times n}.$$

Вид матрицы наблюдаемости такой же, как для одноканального объекта (7.44), но ее мерность иная:

$$N \in R^{(n \times m) \times n}.$$

**Критерий наблюдаемости многоканального объекта.** Многоканальный объект *наблюдаем*, если матрица  $N$  имеет полный ранг:

$$\text{rank } N = n.$$

Чтобы набрать  $n$  линейно независимых уравнений для оценки вектора состояния  $x(0)$ , нужно перебирать строки в матрице  $N$ , выбирая линейно независимые. Если это удастся, то ранг матрицы полный и объект наблюдаем.

Определить, имеет ли матрица полный ранг, можно также по соотношению

$$\det\{N^T N\} \neq 0.$$

Оценивать наблюдаемость и управляемость объекта необходимо до начала процедуры синтеза для того, чтобы убедиться в адекватности модели рассматриваемому объекту.

**ПРИМЕР 7.11**

Проверить свойство наблюдаемости объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,2z + 0,1}{z^2 + z + 0,25}.$$

По передаточной функции объекта запишем его разностное уравнение в матричной форме:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0,25x_2(k) + 0,1u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + 0,2u(k), \\ y(k) = x_2(k). \end{cases}$$

Матрицы  $A$ ,  $C$  объекта имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу наблюдаемости и ее детерминант:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \det N = -1 \neq 0.$$

Поскольку детерминант матрицы наблюдаемости отличен от нуля, объект наблюдаем.

#### 7.5.4. МОДАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА ПО ВЫХОДУ

Рассмотрим процедуру синтеза для объекта, представленного на рис. 7.31. Математическая модель объекта управления задана в виде передаточной функции

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (7.46)$$

$M$  – возмущение, приложенное к выходу объекта (самый неблагоприятный случай).

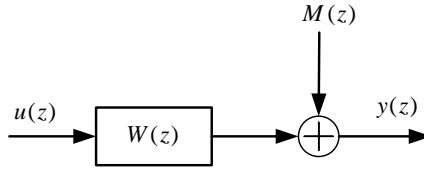


Рис. 7.31. Структурная схема объекта управления

К синтезируемой системе предъявляются следующие требования:

- в статике выход объекта управления должен повторять входное задающее воздействие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = v;$$

- корни в синтезируемой системе должны быть заданными, в то время как корни объекта могут быть произвольными.

Размерность полиномов передаточной функции объекта управления стандартная:

$$\dim A(z) = n, \dim B(z) = n - 1,$$

если в объекте нет элементов чистого запаздывания.

Расчетная структура синтезируемой системы приведена на рис. 7.32, где  $K_d(z)$  – корректор динамики, обеспечивает желаемое распределение корней;  $K_s(z)$  – корректор статики, обеспечивает требования, предъявляемые к статике системы.

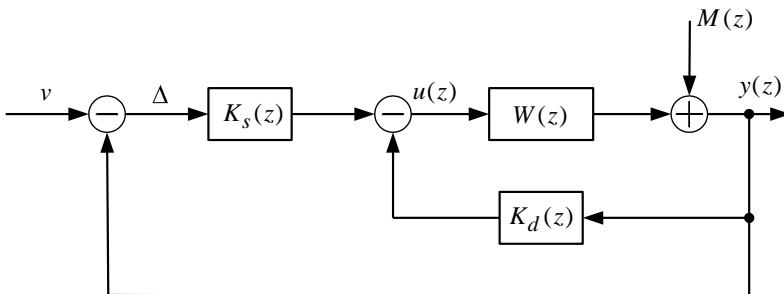


Рис. 7.32. Структурная схема синтезируемой системы

Полагаем, что необходимо обеспечить ошибку в системе равной нулю:

$$\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} (v - y(k)) = 0,$$

и для этого будем использовать астатическую процедуру синтеза. Корректор статики в этой процедуре выбирается в виде дискретного интегратора, передаточная функция которого

$$K_s(z) = \frac{k}{z-1},$$

где  $k$  – параметр регулятора, коэффициент, подлежащий вычислению.

Корректор динамики представляет собой динамическое звено с передаточной функцией вида

$$K_d(z) = \frac{D(z)}{B(z)}, \quad (7.47)$$

где  $D(z) = d_{n-1}z^{n-1} + d_{n-2}z^{n-2} + \dots + d_1z + d_0$ ;  $\dim D(z) = n-1$ ;  $d_i$  – свободные коэффициенты регулятора, подлежащие вычислению.

Выведем основные соотношения метода. В соответствии со структурной схемой рис. 7.32 выражение для выхода имеет вид

$$y(z) = \frac{K_s(z)W(z)}{1 + K_s(z)W(z) + K_d(z)W(z)} v + \frac{1}{1 + K_s(z)W(z) + K_d(z)W(z)} M.$$

Выражение для ошибки в системе

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= v - y(z) = \\ &= \frac{1 + K_d(z)W(z)}{1 + K_s(z)W(z) + K_d(z)W(z)} v - \frac{1}{1 + K_s(z)W(z) + K_d(z)W(z)} M. \end{aligned}$$

Подставим в последнее выражение вместо  $K_s(z)$  его передаточную функцию:

$$\Delta(z) = \frac{(z-1)(1 + K_d(z)W(z))}{(z-1) + kW(z) + (z-1)K_d(z)W(z)} \times \\ \times v - \frac{(z-1)}{(z-1) + kW(z) + (z-1)K_d(z)W(z)} M. \quad (7.48)$$

В статике  $k \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow 1$  и, как видно из равенства (7.48), ошибка в установившемся режиме будет равна нулю при любых входе и возмущении.

Рассмотрим теперь характеристическое уравнение замкнутой системы и для этого приравняем нулю знаменатель из выражения (7.48):

$$(z-1) + kW(z) + (z-1)K_d(z)W(z) = 0.$$

Подставим в это выражение передаточную функцию объекта (7.46) и корректора динамики (7.47):

$$(z-1) + k \frac{B(z)}{A(z)} + (z-1) \frac{D(z)}{B(z)} \frac{B(z)}{A(z)} = 0. \quad (7.49)$$

Преобразовав соотношение (7.49), можно получить характеристическое уравнение синтезируемой системы

$$(z-1)(A(z) + D(z)) + kB(z) = 0. \quad (7.50)$$

Порядок характеристического уравнения системы равен  $(n+1)$ , т. е. необходимо задать  $(n+1)$  желаемый корень  $z_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , откуда формируется желаемый характеристический полином:

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n+1}) = C(z), \quad z^{n+1} + c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0 = C(z). \quad (7.51)$$

Приравнивая левую часть характеристического уравнения (7.50) и желаемый характеристический полином (7.51), получим основное рабочее соотношение для нахождения искомых параметров регулятора (корректоров статики и динамики):

$$(z-1)(A(z) + D(z)) + kB(z) = C(z). \quad (7.52)$$

Далее необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в левой и правой частях уравнения (7.52) и получить систему из  $(n + 1)$  уравнения для нахождения  $d_i$  и  $k$ . Легко убедиться, что число искомых параметров совпадает с числом уравнений, система уравнений является линейной и, следовательно, имеет единственное решение.

Передаточную функцию объекта до начала синтеза следует непременно представить в стандартном нормированном виде.

Обратим внимание на тот факт, что при получении характеристического уравнения синтезируемой системы (7.50) из выражения (7.49) для упрощения расчетов был сокращен полином  $B(z)$ . Это означает, что в системе есть ненаблюдаемая часть, которая должна быть устойчивой для того, чтобы система в целом оставалась устойчивой. Из этого вытекает требование «обратимости» объекта, т. е. обратная передаточная функция

$$W^{-1}(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

должна быть устойчивой, корни полинома  $B(z)$  должны удовлетворять условию

$$|z_i| < 1, \quad i = \overline{1, (n-1)}.$$

Проверка обратимости объекта управления должна выполняться до начала процедуры синтеза.

Рассмотрим теперь процедуру модального метода синтеза для статических систем.

Структурная схема синтезируемой системы (рис. 7.32) остается без изменений, корректор статики представляет собой пропорциональное звено:

$$K_s = k.$$

Выражение для ошибки системы принимает вид

$$\Delta(z) = \frac{1 + K_d(z)W(z)}{1 + kW(z) + K_d(z)W(z)} v - \frac{1}{1 + kW(z) + K_d(z)W(z)} M,$$

и после подстановки передаточных функций объекта (7.46) и корректора динамики (7.47) получаем

$$\Delta(z) = \frac{A(z) + D(z)}{A(z) + kB(z) + D(z)} v - \frac{A(z)}{A(z) + kB(z) + D(z)} M. \quad (7.53)$$

Знаменатель данного выражения – характеристический полином синтезируемой системы, его порядок равен  $n$ .

Искомыми параметрами являются  $d_i, (i = \overline{0, (n-1)})$  и  $k$ .

Основное расчетное соотношение получим, приравняв характеристический полином системы желаемому характеристическому полиному, сформированному из желаемых корней системы

$$A(z) + D(z) + kB(z) = C(z), \quad (7.54)$$

$$\text{где } C(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0 \quad (7.55)$$

– желаемый характеристический полином.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в левой и правой частях уравнения (7.54), получим систему из  $n$  уравнений для нахождения параметров регулятора  $d_i$  и  $k$ :

$$a_i + d_i + kb_i = c_i, \quad i = \overline{0, (n-1)} \quad (7.56)$$

Как видим, система уравнений (7.56) содержит  $n$  уравнений, а искомым параметров на один больше, т.е.  $(n + 1)$ , следовательно, необходимо сформировать еще одно уравнение.

Систему уравнений для нахождения искомым параметров регулятора (7.56) дополним уравнением ошибки (7.53) в статике, при этом получим  $(n + 1)$  уравнение для поиска  $(n + 1)$  искомого параметра регулятора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\max} = \left| \frac{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{i=0}^{n-1} d_i}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i} \right| v_{\max} + \left| \frac{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i} \right| M_{\max}, \\ a_i + d_i + kb_i = c_i \quad i = \overline{0, (n-1)}. \end{array} \right.$$



Данная процедура синтеза предполагает, что задается абсолютная величина установившейся ошибки системы  $\Delta_{\max}$  либо ее относительное значение при заданных пределах изменения входа  $v_{\max}$  и возмущения  $M_{\max}$ .

Как мы видим, методика синтеза по выходу предполагает обратную связь по выходной переменной и это очень удобно при практическом синтезе, поскольку уменьшает чувствительность систем к погрешностям построения математической модели объекта.

### ПРИМЕР 7.12

Для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,25z + 0,1}{z^2 + z - 0,9},$$

выполнить синтез регулятора, используя процедуру модального метода синтеза статических систем по выходу. Изобразить структурную схему регулятора, реализованную на звеньях задержки. Желаемые свойства системы заданы корнями:  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 0,2$ . Ошибка в статике  $\Delta = 1\%$ ,  $V_{\max} = 1$ ;  $M_{\max} = 0$ .

Проверим управляемость объекта. Для этого представим его модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0,9x_2(k) + 0,1u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + 0,25u(k), \\ y(k) = x_2(k), \end{cases}$$

его матрицы  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0,9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,25 \end{bmatrix}$ ;  $C = 0 \quad 1$ .

Матрица управляемости  $U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,225 \\ 0,25 & -0,15 \end{bmatrix}$ .

Поскольку  $\det U = -0,07125 \neq 0$ , объект управляем.

Проверим наблюдаемость объекта. Матрица наблюдаемости  $N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} =$   
 $= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Поскольку  $\det N = -1 \neq 0$ , объект наблюдаем.

Проверим обратимость. Найдем корень числителя передаточной функции объекта:  $0,25z + 0,1 = 0$ ;  $z = -\frac{0,1}{0,25} = -0,4$ ;  $|z| < 1$ . Поскольку корень устойчив, объект обратим.

В соответствии с (7.54) характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$z^2 + (1 + d_1 + 0,25K)z + (-0,9 + d_0 + 0,1K) = z^2 - 0,2z.$$

Уравнение статики системы

$$\Delta_0 = \frac{1 + 0,1 + (d_1 + d_0)}{1 + (-0,2)} = 1 \Rightarrow 1,375 + 1,25(d_1 + d_0) = 0,01.$$

Используя два последних уравнения, запишем систему уравнений для искоемых параметров регулятора:

$$\begin{cases} 1 + d_1 + 0,25K = -0,2, \\ d_0 - 0,9 + 0,1K = 0, \\ 1,375 + 1,25(d_1 + d_0) = 0,01, \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = -1,766, \\ d_0 = 0,674, \\ k = 2,26. \end{cases}$$

Передаточную функцию корректора динамики приведем к нормированному виду:

$$K_d(z) = \frac{-1,766z + 0,674}{0,25z + 0,1} = \frac{-7,064z + 2,696}{z + 0,4}.$$

Структурная схема синтезированной системы приведена на рис. 7.33.

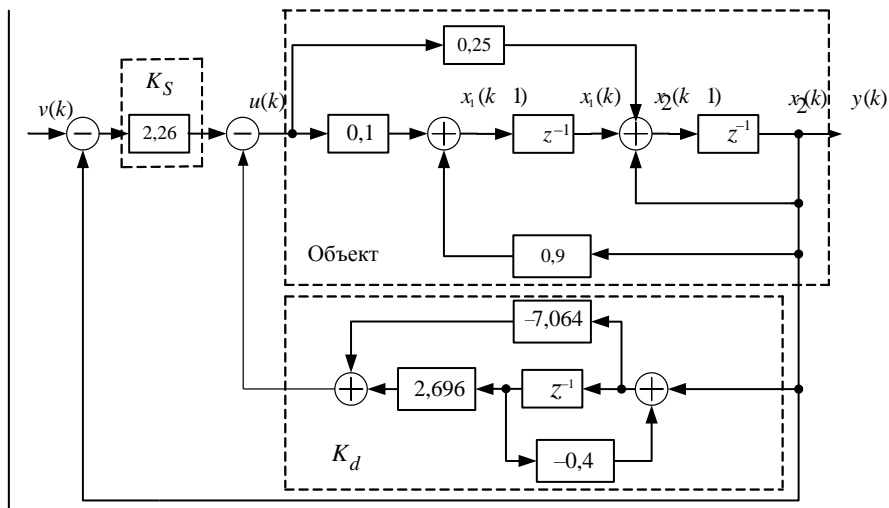


Рис. 7.33. Структурная схема системы, синтезированной в примере 7.11

### 7.5.5. ПРОЦЕДУРА МОДАЛЬНОГО МЕТОДА СИНТЕЗА ПО СОСТОЯНИЮ

Эта процедура предполагает обратные связи по переменным состояниям, что предъявляет более высокие требования к точности построения моделей объектов управления.

Пусть задана модель объекта в матричной форме, а управление формируется в виде обратных связей по состоянию объекта:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ u(k) = -Kx(k). \end{cases} \quad (7.57)$$

Будем считать, что вектор состояния  $x(k)$  полностью измерим. Матрица обратных связей  $K$ , как видно из системы уравнений (7.57), имеет следующую размерность:

$$K \in R^{m \times n}$$

Подставим управление в уравнения объекта:

$$x(k+1) = Ax(k) + B(-Kx(k)),$$

преобразуем последнее уравнение

$$x(k+1) = (A - BK)x(k). \quad (7.58)$$

Из уравнения (7.58) сформируем характеристический полином синтезируемой системы и приравняем его желаемому  $C(z)$ , найденному аналогично (7.55):

$$\det[zI - A + BK] = C(z). \quad (7.59)$$

Порядок характеристического уравнения системы равен  $n$ , следовательно, число уравнений, порождаемых основным расчетным соотношением (7.59), также равно  $n$ , т.е. меньше, чем количество искомых коэффициентов матрицы  $K$ , поэтому часть коэффициентов можно задать произвольно, часто их задают нулевыми, но  $n$  штук коэффициентов матрицы  $K$  должны остаться свободными.

**Рекомендация:** при выборе свободных коэффициентов  $k_{i,j}$  матрицы  $K$  ( $n$  штук) необходимо, чтобы в каждый коэффициент характеристического уравнения при степенях  $z$  левой части последнего равенства (7.59) вошел хотя бы один из свободных коэффициентов.

### Реализация статики в многоканальной системе

В управляющее воздействие добавляется еще одна составляющая

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ u(k) = -Kx(k) + Dv, \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (7.60)$$

где  $D \in R^{m \times m}$  – квадратная матрица, обеспечивающая требуемые статические свойства системы;  $v$  – входное задающее воздействие; мерности векторов традиционные:  $(u, y, v) \in R^m$ .

Преобразуем систему уравнений (7.60), подставив управление в первое уравнение:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A - BK)x(k) + BDv, \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (7.61)$$

Для нахождения матрицы  $D$  запишем уравнения статики синтезируемой системы по уравнениям (7.61) и сделаем соответствующие преобразования:

$$\begin{cases} x^0 = \overbrace{(A - BK)}^{A_*} x^0 + BDv, \\ y^0 = Cx^0, \end{cases}$$

где  $A_*$  – желаемая матрица синтезируемой системы, имеющая желаемый набор собственных чисел;  $x^0, y^0$  – установившиеся значения вектора состояния и вектора выхода.

Так как выход в статике должен повторять входное задающее воздействие

$$y^0 = \underbrace{C(I - A_*)^{-1} B D}_{I} v,$$

то окончательное выражение для вычисления искомой матрицы  $D$  принимает вид

$$D = [C \ I - A_*^{-1} B]^{-1}.$$

Найденная матрица  $D$  обеспечивает требуемые статические свойства системы при отсутствии возмущений, действующих на объект.

Полная структурная схема синтезируемой системы приведена на рис. 7.34.

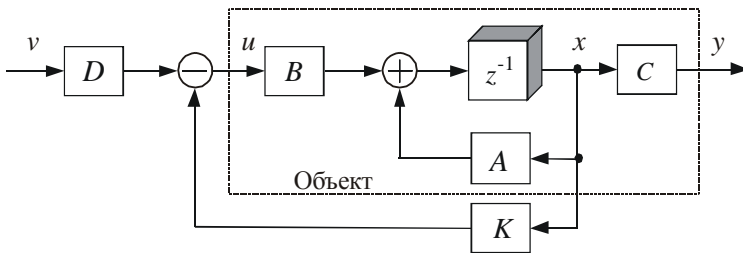


Рис. 7.34. Структурная схема системы, построенная в соответствии с процедурой модального метода синтеза по состоянию

### 7.5.6. ПРОЦЕДУРА МОДАЛЬНОГО МЕТОДА СИНТЕЗА ПО СОСТОЯНИЮ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОГО ОБЪЕКТА

Модель объекта стандартная, и управляющее воздействие формируется так же, как для многоканального объекта (7.57).

Отличие от предыдущей процедуры только в мерностях векторов и матриц:

$$(u, y, v) \in R^1, \\ K \in R^{1 \times n},$$

матрица  $K$  – теперь матрица строка.

Процедура синтеза значительно облегчается, если модель объекта представить в «прямой» форме (см. подразд. 7.2.9), при этом полагаем, что коэффициенты матриц  $A, B, C$  порождены передаточной функцией одноканального объекта:

$$W(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]; \quad K = k_0, k_1, \dots, k_{n-1}.$$

Если выпишем уравнения замкнутой системы (7.61):

$$x(k+1) = (A - BK)x(k),$$

то матрица правой части вычислится следующим образом:

$$A - BK = A_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \dots & -a_{n-1} - k_{n-1} \end{bmatrix}.$$

В характеристическое уравнение синтезированной системы войдут только коэффициенты из последней строки этой матрицы, следовательно, система уравнений для нахождения коэффициентов матрицы  $K$  выглядит так:

$$a_i + k_i = c_i \Rightarrow k_i = c_i - a_i, \quad i = 0; \overline{(n-1)},$$

где  $c_i$  – коэффициенты желаемого характеристического полинома, аналогичного (7.55).

### 7.5.7. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ АСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Здесь мы воспользуемся свойством астатизма замкнутых систем, в прямом канале которых имеется интегратор (в данном случае цифровой), для того чтобы обеспечить желаемую статику при действии на объект возмущающих воздействий. Схема такой системы приведена на рис. 7.35, где  $x \in R^n$ ,  $u, y \in R^1$ ,  $K \in R^{1 \times n}$ ,  $k_{ин} \in R^1$ .

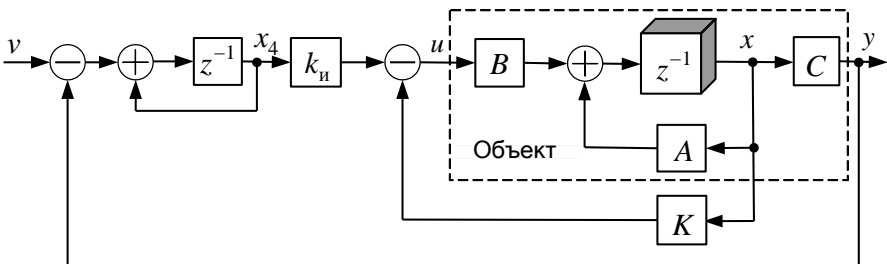


Рис. 7.35. Структурная схема астатической системы, построенной в соответствии с процедурой модального метода синтеза по состоянию

Матричная модель одноканального объекта – стандартная:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (7.62)$$

Рассмотрим процедуру синтеза на примере объекта третьего порядка, представленного в «прямой» форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = b_0 \quad b_1 \quad b_2.$$

Расширим модель объекта, добавив разностное уравнение интегратора в (7.62):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ x_4(k+1) = v(k) - y(k) + x_4, \\ u(k) = k_{\text{и}}x_4(k) - Kx(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases}$$

Для рассматриваемой замкнутой системы с объектом третьего порядка расширенная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k), \\ x_3(k+1) = (-a_0 - k_0)x_1(k) + (-a_1 - k_1)x_2(k) + \\ + (-a_2 - k_2)x_3(k) + k_{\text{и}}x_4(k), \\ x_4(k+1) = v - b_0x_1(k) - b_1x_2(k) - b_2x_3(k) + x_4(k), \\ y(k) = b_0x_1(k) + b_1x_2(k) + b_2x_3(k). \end{cases} \quad (7.63)$$

Запишем матрицу правой части расширенной системы (7.63):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & k_{\text{и}} \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & 1 \end{bmatrix}.$$



Основное расчетное соотношение получаем традиционным образом, приравняв характеристический полином замкнутой системы и желаемый характеристический полином:

$$\det zI - \bar{A} = C(z), \quad C(z) = \prod_{i=1}^{n+1} (z - z_i). \quad (7.64)$$

Систему уравнений для нахождения искоемых параметров регулятора получаем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в правой и левой частях основного расчетного соотношения (7.64):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \\ k_0 \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 + 1 - a_2 \\ c_2 + a_2 - a_1 \\ c_1 + a_1 - a_0 \\ c_0 + a_0 - 0 \end{bmatrix}. \quad (7.65)$$

На примере системы третьего порядка видно, что система уравнений для поиска параметров регулятора (7.65) хорошо структурирована. Аналогичную систему уравнений легко получить для объекта второго порядка, а далее, используя метод математической индукции, можно записать систему уравнений, позволяющую рассчитать параметры регулятора для объекта произвольного порядка.

Важно отметить, что для реализации процедуры модального метода синтеза по состоянию необходимо иметь полную информацию о векторе состояния либо найти его оценку.

**Выводы.** В этом подразделе мы рассмотрели два способа синтеза цифровых систем управления, каждый из которых имеет свою область применения. Процедура модального метода синтеза по выходу предполагает представление модели объекта в операторной форме, и при этом к модели объекта, кроме общих требований управляемости и наблюдаемости, предъявляется требование устойчивости обратной модели.

При использовании процедуры модального метода синтеза по состоянию модель объекта задается в виде матричного разностного уравнения и не требуется устойчивость обратной модели объекта. В то же время данная процедура предполагает, что в алгоритме управления используется полный вектор состояния объекта, который должен быть измерим, а это встречается в реальных условиях крайне редко, либо в

алгоритме управления используется оценка вектора состояния, полученная с помощью специальных динамических подсистем, называемых фильтрами оценки состояния или наблюдателями состояния.

## 7.6. НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ

При синтезе регуляторов и при решении других задач управления появляется необходимость в оценке полного вектора состояния объекта в реальном времени. Для решения этой задачи используются различные алгоритмы, которые реализуются в виде динамических подсистем, позволяющих эти оценки получить. Предполагается, что объект управления является наблюдаемым. Рассмотрим здесь основные способы оценивания состояния объектов управления.

### 7.6.1. ОПЕРАТОРНАЯ ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

Используем математическую модель объекта управления в виде передаточной функции, т.е. в операторной форме, поэтому процедура синтеза наблюдателей называется «операторной».

Рассмотрим структуру наблюдателя Люинбергера [46] (рис. 7.36). Идея наблюдателя заключается в том, что параллельно объекту управления  $W(z)$  включается динамическая подсистема, в состав которой

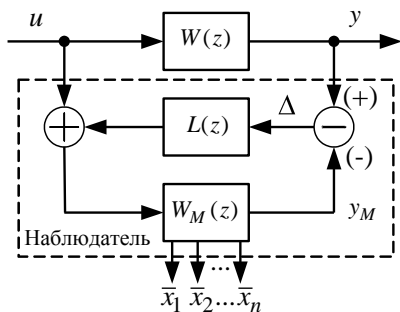


Рис. 7.36. Структурная схема наблюдателя Люинбергера

входит модель объекта управления (передаточные функции  $W_M(z)$  и  $W(z)$  совпадают). Кроме этого, включен стабилизирующий корректор  $L(z)$ , который позволяет процессы в наблюдателе сделать устойчивыми, даже если объект управления неустойчив. Этот корректор позволяет обеспечить требуемое качество сходимости к нулю разницы  $\Delta$  между выходом объекта  $y$  и выходом модели  $u_M$ :  $\Delta = y - u_M$ .

Рассмотрим свойства наблюдателя. Запишем операторное выражение для ошибки в соответствии со структурной схемой (рис. 7.36):

$$\Delta(z) = W(z)u(z) - W_M(z) u(z) + L(z)\Delta(z) . \quad (7.66)$$

Поскольку передаточные функции  $W(z)$  и  $W_M(z)$  совпадают:

$$W(z) = W_M(z) = \frac{B(z)}{A(z)} ,$$

выражение (7.66) после преобразования принимает вид

$$A(z) + B(z)L(z) \Delta(z) = 0 .$$

Это однородное разностное уравнение; в случае устойчивости его решений положение равновесия по  $\Delta$  будет равно нулю, т. е. начиная с некоторого момента времени выход модели  $y_M$  будет как угодно точно повторять выход объекта  $y$ , при этом можно предположить, что вектор состояния модели  $\bar{X} = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  с той же точностью повторяет вектор состояния объекта  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$  .

Характеристическое уравнение наблюдателя:

$$A(z) + L(z)B(z) = 0 . \quad (7.67)$$

Корни такого уравнения должны соответствовать требуемому качеству процессов по ошибке  $\Delta$ . С помощью корректора  $L(z)$  заданные корни можно реализовать. Рассмотрим это на примерах.

### ПРИМЕР 7.13

Синтезируется наблюдатель для объекта первого порядка с передаточной функцией

$$W(z) = \frac{b_0}{z + a_0} .$$

Характеристическое уравнение наблюдателя в соответствии с (7.67) для этого объекта

$$z + a_0 + L(z)b_0 = 0 .$$

Корректор для этого случая выберем в виде  $L(z) = l_0$ , тогда характеристическое уравнение наблюдателя примет вид

$$z + a_0 + l_0 b_0 = 0.$$

Поскольку характеристическое уравнение имеет первый порядок, необходимо задать один желаемый корень наблюдателя  $z_1$  и сформировать желаемый характеристический полином  $C(z)$ . В результате получаем искомый параметр корректора  $l_0$

$$C(z) = z - z_1 \Rightarrow a_0 + l_0 b_0 = -z_1 \Rightarrow l_0 = -z_1 - a_0 / b_0.$$

Потребуем, чтобы процессы в контуре имели минимальную длительность, тогда

$$c(z) = z \Rightarrow a_0 + l_0 b_0 = 0 \Rightarrow l_0 = -a_0 / b_0.$$

#### ПРИМЕР 7.14

Наблюдатель для объекта второго порядка. Полиномы передаточной функции объекта второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} A(z) &= z^2 + a_1 z + a_0, \\ B(z) &= b_1 z + b_0. \end{aligned}$$

Корректор  $L(z)$  выбираем пока нереализуемый (без полинома знаменателя):

$$L(z) = l_1 z + l_0.$$

Характеристическое уравнение корректора для этого случая в соответствии с (7.67)

$$z^2 + a_1 z + a_0 + (l_1 z + l_0)(b_1 z + b_0) = 0.$$

Приведем это характеристическое уравнение к расчетному виду и приравняем его к желаемому характеристическому полиному, сформированному с помощью двух желаемых корней:

$$z^2 + \frac{a_1 + b_0 l_1 + b_1 l_0}{1 + b_1 l_1} z + \frac{a_0 + b_0 l_0}{1 + b_1 l_1} = z^2 + c_1 z + c_0.$$

Система уравнений для вычисления параметров корректора  $l_0$  и  $l_1$  получается следующая:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + b_0 l_1 + b_1 l_0}{1 + b_1 l_1} = c_1, \\ \frac{a_0 + b_0 l_0}{1 + b_1 l_1} = c_0. \end{cases} \quad (7.68)$$

Потребуем, чтобы процессы в наблюдателе имели минимальную длительность, тогда система (7.68) упрощается

$$\begin{cases} a_1 + b_1 l_0 + b_0 l_1 = 0, \\ a_0 + b_0 l_0 = 0, \end{cases}$$

и в результате получим искомые параметры корректора

$$l_0 = -\frac{a_0}{b_0}, \quad l_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0^2}.$$

### ПРИМЕР 7.15

Синтезируется наблюдатель для объекта второго порядка с реализуемым корректором. Выбираем корректор в виде передаточной функции, у которой порядок полинома числителя равен порядку полинома знаменателя:

$$L(z) = \frac{l_1 z + l_0}{z + \alpha_0}.$$

Как известно, такая передаточная функция является реализуемой, в отличие от предыдущего примера.

Запишем характеристическое уравнение наблюдателя (7.67), приравняем его желаемому характеристическому полиному, тогда расчетное соотношение для нахождения параметров корректора принимает вид

$$(z^2 + a_1 z + a_0)(z + \alpha_0) + (b_1 z + b_0)(l_1 z + l_0) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

где в правой части – характеристический полином наблюдателя, а в левой – желаемый характеристический полином, сформированный из желаемых корней. Как видим, порядок наблюдателя равен  $(2n - 1) = 3$ , где  $n = 2$  – порядок объекта.

Система уравнений для расчета искомых параметров корректора, порожаемая последним уравнением, приведена ниже:

$$\begin{cases} a_1 + \alpha_0 + b_1 l_1 = c_2, \\ a_0 + a_1 \alpha_0 + b_1 l_0 + b_0 l_1 = c_1, \\ a_0 \alpha_0 + b_0 l_0 = c_0, \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_0 & b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ l_0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 - a_1 \\ c_1 - a_0 \\ c_0 - 0 \end{bmatrix}. \quad (7.69)$$

**ПРИМЕР 7.16**

Синтезируется наблюдатель для объекта третьего порядка. По аналогии с примером 7.15 корректор выбираем в виде передаточной функции порядка  $(n-1)$ :

$$L(z) = \frac{l_2 z^2 + l_1 z + l_0}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}.$$

Основное расчетное соотношение для этого случая:

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 - z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 - l_2 z^2 + l_1 z + l_0 = c(z),$$

а порождаемая им система уравнений для расчета параметров корректора получается следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ l_0 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 - a_2 \\ c_3 - a_1 \\ c_2 - a_0 \\ c_1 - 0 \\ c_0 - 0 \end{bmatrix}. \quad (7.70)$$

**Выводы**

1. Порядок корректора  $L(z)$  для таких наблюдателей равен  $(n - 1)$ , где  $n$  – порядок объекта.
2. Порядок наблюдателя в целом равен  $(2n - 1)$ .
3. Минимальное время сходимости процессов в наблюдателе не более  $(2n - 1)$  шагов.
4. На основании анализа систем уравнений (7.69) и (7.70) методом математической индукции аналогичную систему уравнений для расчета параметров корректора можно построить для объекта любого порядка.

### 7.6.2. МАТРИЧНАЯ ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

Здесь рассмотрим процедуру синтеза наблюдателей, в которой используется математическая модель объекта в векторно-матричной форме, поэтому процедуру назовем «матричной»:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (7.71)$$

размерности векторов и матриц стандартные:

$$x \in R^n; u, y \in R^m; A \in R^{n \times n}; B \in R^{n \times m}; C \in R^{m \times n}.$$

Объект должен обладать свойством наблюдаемости.

Как видно из структурной схемы (рис. 7.37), данный наблюдатель дает возможность найти оценку вектора состояния  $\bar{x}(k)$ , кроме того, он позволяет получить прогноз вектора состояния  $\bar{x}(k+1)$ , а с его помощью можно получить прогноз выхода объекта, что может оказаться полезным при решении задач синтеза регуляторов.

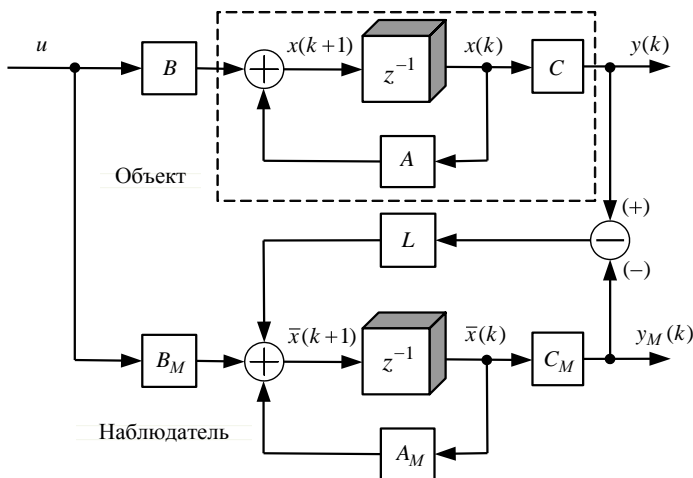


Рис. 7.37. Структурная схема наблюдателя, синтезированного по матричной процедуре

Представим систему уравнений, описывающих динамические свойства наблюдателя:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A_M \bar{x}(k) + B_M u(k) + L \Delta(k), \\ y_M(k) = C_M \bar{x}(k), \\ \Delta(k) = y(k) - y_M(k), \end{cases} \quad (7.72)$$

где  $A_M = A$ ,  $B_M = B$ ,  $C_M = C$ ;  $L \in R^{n \times m}$  – матрица-корректор наблюдателя. Порядок наблюдателя совпадает с порядком объекта.

Введем новую переменную как невязку между вектором состояния объекта и вектором состояния наблюдателя:

$$e(k) = x(k) - \bar{x}(k),$$

сдвинем аргумент в этом уравнении на один шаг вперед:

$$e(k+1) = x(k+1) - \bar{x}(k+1). \quad (7.73)$$

Подставим  $x(k+1)$  и  $\bar{x}(k+1)$  в выражение (7.73) из уравнений (7.71) и (7.72), получим разностное уравнение для невязки

$$e(k+1) = (A - LC)e(k). \quad (7.74)$$

Уравнение для невязки (7.74) является однородным. Если наблюдатель устойчив, то  $e(k)$  стремится к нулю и при этом  $\bar{x}(k)$  стремится к  $x(k)$ .

Основное расчетное соотношение для вычисления параметров корректора (матрицы  $L$ ) получим из выражения (7.74), записав характеристическое уравнение наблюдателя

$$\det(zI - A + LC) = C(z), \quad (7.75)$$

где  $C(z)$  есть желаемый характеристический полином наблюдателя, сформированный из желаемых корней.

Число уравнений, порождаемых основным расчетным соотношением (7.75), меньше, чем количество искоемых коэффициентов матрицы-корректора, поэтому часть коэффициентов можно задать произвольно, нередко их задают нулевыми, но  $n$  штук коэффициентов матрицы  $L$  должны остаться свободными.

**Рекомендация:** при выборе свободных коэффициентов  $l_{i,j}$  матрицы-корректора ( $n$  штук) необходимо, чтобы в каждый коэффициент характеристического уравнения при степенях  $z$  левой части уравнения (7.75) вошел хотя бы один из свободных коэффициентов.



**ПРИМЕР 7.17**

Синтезируется наблюдатель для объекта второго порядка. Запишем матрицы модели одноканального объекта второго порядка:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = b_0 \quad b_1; \quad L = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение наблюдателя имеет вид

$$\det \left( \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_0 b_0 & l_0 b_1 \\ l_1 b_0 & l_1 b_1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Потребуем, чтобы в наблюдателе были процессы минимальной длительности, тогда

$$\det \begin{bmatrix} z + l_0 b_0 & -1 + l_0 b_1 \\ a_0 + l_1 b_0 & z + a_1 + l_1 b_1 \end{bmatrix} = z^2.$$

Уравнения для вычисления параметров наблюдателя получим следующие:

$$\begin{cases} l_0 b_0 + l_1 b_1 + a_1 = 0, \\ -l_0 b_0 l_1 b_1 - l_0 b_1 a_0 + a_0 + l_1 b_0 = 0. \end{cases}$$

### 7.6.3. МАТРИЧНАЯ ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Модель одноканального объекта выглядит так же, как многоканального (7.71). Отличие от предыдущей процедуры только в мерностях векторов и матриц:

$$x \in R^n, \quad y, u \in R^1, \quad A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times 1}, \quad C \in R^{1 \times n}, \quad L \in R^{n \times 1}.$$

Полагаем, что коэффициенты матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  порождены передаточной функцией одноканального объекта:

$$W(z) = \frac{b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Процедура синтеза значительно облегчается, если модель объекта представлять в «транспонированной» форме (см. подразд. 7.2.12):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Запишем матрицу правой части разностного уравнения наблюдателя аналогично (7.74):

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - l_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - l_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 - l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - l_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (7.76)$$

В характеристическое уравнение наблюдателя (7.75) войдут только коэффициенты из последнего столбца матрицы (7.76), следовательно, система уравнений для нахождения коэффициентов матрицы-корректора  $L$  выглядит так:

$$a_i + l_i = c_i \Rightarrow l_i = c_i - a_i, \quad i = \overline{0; (n-1)},$$

где  $c_i$  – коэффициенты желаемого характеристического полинома  $C(z)$ .

#### ПРИМЕР 7.18

Синтезируется наблюдатель для объекта третьего порядка. Рассмотрим процедуру синтеза на примере одноканального объекта третьего порядка. Модель объекта представим в «транспонированной» форме:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица правой части разностного уравнения наблюдателя

$$(A - LC) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-a_0 - l_0) \\ 1 & 0 & (-a_1 - l_1) \\ 0 & 1 & (-a_2 - l_2) \end{bmatrix}.$$

Параметры матрицы-корректора  $L$  вычисляются в выбранном базисе очень просто:

$$\begin{cases} a_0 + l_0 = c_0 \\ a_1 + l_1 = c_1 \\ a_2 + l_2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_0 = c_0 - a_0 \\ l_1 = c_1 - a_1 \\ l_2 = c_2 - a_2. \end{cases}$$

#### 7.6.4. НАБЛЮДАТЕЛИ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Идея синтеза наблюдателя пониженного порядка состоит в использовании тех координат состояния, которые доступны измерению. Для оценки оставшейся части переменных можно построить наблюдатель, порядок которого ниже порядка объекта.

Пусть математическая модель объекта, для которого необходимо построить наблюдатель, задана в стандартной форме

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases}$$

Размерности векторов, входящих в систему уравнений, следующие:

$$x \in R^n, \quad (u, y) \in R^m.$$

Разделим теперь вектор состояния объекта на две компоненты:

$$x_n \in R^{n-m} \text{ и } x_m \in R^m \Rightarrow x = [x_n, x_m]^T,$$

где  $x_n$  – наблюдаемая часть вектора состояния;  $x_m$  – измеряемая часть вектора состояния.

Перейдем к новому вектору состояния, в котором в качестве измеряемой компоненты используется вектор выхода  $y$ :

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_n \\ y \end{bmatrix}, \quad x_1 = Px. \quad (7.77)$$

Преобразуем исходную модель объекта, используя разделение вектора состояния на две компоненты:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_n(k+1) \\ x_m(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k), \\ y = C_1 \quad C_2 \begin{bmatrix} x_n \\ x_m \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (7.78)$$

Найдем матрицу связи между исходным и новым вектором состояния. Воспользуемся для этого выражением (7.77), предварительно разделив матрицу  $P$  на клетки:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n = P_{11}x_n + P_{12}x_m, \\ y = P_{21}x_n + P_{22}x_m. \end{cases}$$

Легко показать, воспользовавшись уравнением выхода из системы уравнений (7.78), что клетки матрицы  $P$  принимают значения:

$$\begin{aligned} P_{11} &= I \in R^{(n-m) \times (n-m)}; & P_{12} &= 0 \in R^{(n-m) \times m}; \\ P_{21} &= C_1 \in R^{m \times (n-m)}; & P_{22} &= C_2 \in R^{m \times m}, \end{aligned}$$

следовательно, матрица  $P$  имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения объекта в новом базисе:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_H(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_H(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) = \bar{C} \begin{bmatrix} x_H(k) \\ y(k) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (7.79)$$

Матрицы объекта в новом базисе вычисляются по обычной процедуре:

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}.$$

Выведем теперь уравнения наблюдателя и для этого преобразуем уравнения объекта (7.79):

$$\begin{cases} x_H(k+1) = \bar{A}_{11}x_H(k) + \bar{A}_{12}y(k) + \bar{B}_1u(k), \\ y(k+1) = \bar{A}_{21}x_H(k) + \bar{A}_{22}y(k) + \bar{B}_2u(k). \end{cases} \quad (7.80)$$

Уравнение наблюдателя сформируем из первого уравнения системы (7.80):

$$\bar{x}_H(k+1) = \bar{A}_{11}\bar{x}_H(k) + \bar{A}_{12}y(k) + \bar{B}_1u(k) + L\Delta(k), \quad (7.81)$$

где  $L$  – матрица-корректор наблюдателя, а  $\Delta(k)$  – невязка, которую сформируем, используя второе уравнение системы (7.80):

$$\Delta(k) = y(k+1) - \bar{A}_{21}\bar{x}_H(k) - \bar{A}_{22}y(k) - \bar{B}_2u(k). \quad (7.82)$$

Подставим уравнение (7.82) в уравнение (7.81):

$$\begin{aligned} \bar{x}_H(k+1) &= \bar{A}_{11}\bar{x}_H(k) + \bar{A}_{12}y(k) + \bar{B}_1u(k) + \\ &+ L \left[ y(k+1) - \bar{A}_{21}\bar{x}_H(k) - \bar{A}_{22}y(k) - \bar{B}_2u(k) \right]. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Соотношение (7.83) и есть математическая модель наблюдателя пониженного порядка, а  $\bar{x}_H(k)$  – оценка наблюдаемой части вектора состояния, полученная с помощью этого наблюдателя.

На рис. 7.38 показана структурная схема наблюдателя пониженного порядка, построенная в соответствии с его математической моделью (7.83).

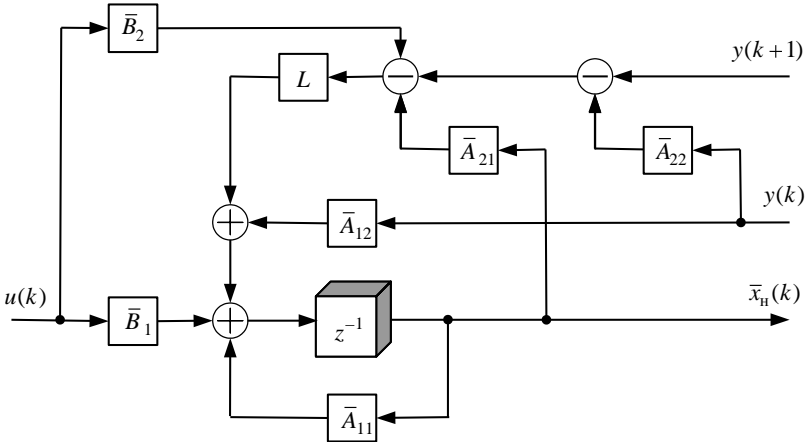


Рис. 7.38. Структурная схема наблюдателя пониженного порядка

В схеме, приведенной на рис. 7.38, присутствует прогноз вектора выхода объекта  $y(k + 1)$ , поэтому необходимо модифицировать исходную структурную схему наблюдателя, используя известные структурные преобразования. Результат этих преобразований приведен на рис. 7.39.

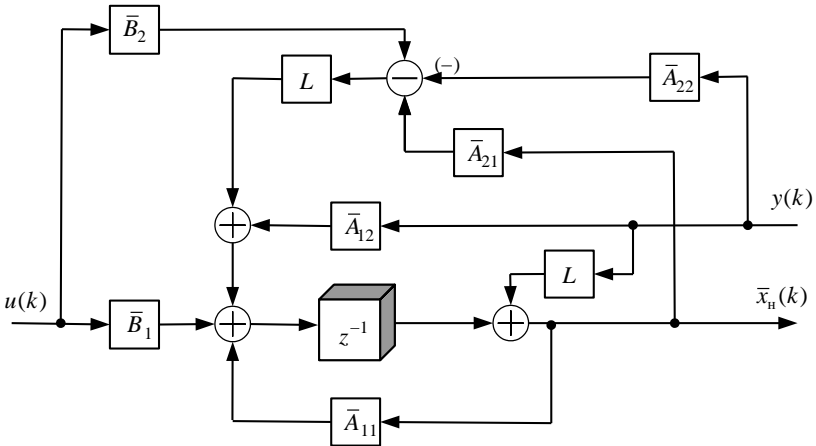


Рис. 7.39. Реализуемая структурная схема наблюдателя пониженного порядка

Для расчета коэффициентов матрицы-корректора наблюдателя  $L$  преобразуем его математическую модель. Введем новую переменную:

$$e(k) = x_n(k) - \bar{x}_n(k) \Rightarrow e(k+1) = x_n(k+1) - \bar{x}_n(k+1)$$

Разностное уравнение для новой переменной запишем, воспользовавшись уравнениями объекта (7.80) и наблюдателя (7.83):

$$e(k+1) = (\bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21})e(k), \quad (7.84)$$

где  $\bar{A}_{11} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $\bar{A}_{21} \in R^{m \times (n-m)}$ ,  $L \in R^{(n-m) \times m}$ . Разностное уравнение (7.84) дает возможность записать характеристическое уравнение наблюдателя пониженного порядка, а оно, в свою очередь, найти параметры матрицы-корректора наблюдателя  $L$ . По известной процедуре модального метода синтеза, в соответствии с требованиями к динамическим свойствам наблюдателя, задаются корни его характеристического уравнения, из которых формируется желаемый характеристический полином. Приравнявая характеристический полином наблюдателя и желаемый характеристический полином, получаем расчетное соотношение для нахождения параметров матрицы-корректора  $L$ :

$$\det zI - \bar{A}_{11} + L\bar{A}_{21} = C(z). \quad (7.85)$$

Как и для обычного матричного наблюдателя, число уравнений, порождаемых основным расчетным соотношением (7.85), меньше, чем количество искоемых коэффициентов матрицы-корректора, поэтому часть коэффициентов можно задать произвольно, нередко их задают нулевыми, но  $(n - m)$  штук коэффициентов матрицы  $L$  должны остаться свободными.

### ПРИМЕР 7.19

Рассчитать наблюдатель пониженного порядка для объекта, математическая модель которого задана следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0,1x_1(k) - 0,4x_2(k) + 0,5u(k), \\ x_2(k+1) = 0,3x_1(k) - 0,2x_2(k) + 0,6u(k), \\ y(k) = x_1(k) + 0,5x_2(k). \end{cases}$$

Желаемая динамика наблюдателя задана корнем  $z = 0,01$ .

Решение:

Запишем матрицы объекта:

$$A = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,4 \\ 0,3 & -0,2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{bmatrix}; \quad C = 1,0 \quad 0,5 .$$

Проверим наблюдаемость объекта:

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1,0 & 0,5 \\ 0,05 & -0,5 \end{bmatrix} = -0,525 \neq 0 \text{ — объект наблюдаем.}$$

Новый вектор состояния сформируем следующим образом:  $x_n = x_1$ ,  $x_{ii} = y$ , тогда матрица связи между исходным и новым вектором состояния

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} .$$

Найдем матрицы объекта в новом базисе:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,8 \\ 1,05 & -1,0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,8 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = CP^{-1} = 0 \quad 1 .$$

В соответствии с выражением (7.83) определим значение параметра корректора наблюдателя:  $z - 0,7 + l \cdot 1,05 = z - 0,01 \Rightarrow l = 0,6571$ .

Запишем уравнение наблюдателя в соответствии с выражением (7.83), используя найденные матрицы объекта в новом базисе:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(k+1) &= 0,7\bar{x}_1(k) - 0,8y(k) + 0,5u(k) + \\ &+ l(y(k+1) - 1,05\bar{x}_1(k) + y(k) - 0,8u(k)). \end{aligned}$$

В последнее выражение подставим значение параметра корректора  $l$  и приведем подобные:

$$\bar{x}_1(k+1) = 0,01\bar{x}_1(k) - 0,1429y(k) - 0,0257u(k) + 0,6571y(k+1) .$$

Введем новую переменную

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \bar{x}_1(k) - 0,6571y(k) \Rightarrow \bar{x}_1(k) = \varepsilon(k) + 0,6571y(k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon(k+1) = \bar{x}_1(k+1) - 0,6571y(k+1) \end{aligned}$$

и преобразуем уравнение наблюдателя

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1) &= 0,01\varepsilon(k) - 0,1369y(k) - 0,0257u(k), \\ \bar{x}_1(k) &= \varepsilon(k) + 0,6571y(k). \end{aligned}$$

Последняя система уравнений позволяет реализовать наблюдатель пониженного порядка для заданного объекта управления.



### 7.6.5. ОСОБЕННОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЯМИ

При применении наблюдателя для получения оценки вектора состояния, которая в последующем используется в обратной связи, необходимо учитывать тот факт, что наблюдатель представляет собой динамическую подсистему, свойства которой влияют на динамику системы в целом. Оценим это влияние. Для этого запишем полную систему уравнений, описывающую объект управления с регулятором и наблюдателем, используя соотношения (7.57) и (7.72):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \\ u(k) = -Kx_H(k), \\ x_H(k+1) = A_H x_H(k) + B_H u(k) + L(y - y_H), \\ y_H(k) = C_H x_H(k). \end{cases} \quad (7.86)$$

Введем новую переменную:

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= x(k) - x_H(k) \Rightarrow x_H(k) = x(k) - \Delta(k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta(k+1) = x(k+1) - x_H(k+1). \end{aligned}$$

Перепишем исходную систему уравнений (7.86), используя новую переменную, а также примерное равенство матриц объекта и наблюдателя:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) - BKx(k) + BK\Delta(k), \\ \Delta(k+1) = A\Delta(k) - LC\Delta(k). \end{cases}$$

Запишем это выражение в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \Delta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \Delta(k) \end{bmatrix}.$$

Матрица правой части разностного уравнения получилась треугольная. Характеристическое уравнение системы с наблюдателем имеет вид

$$\det \left( zI - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Для треугольной квадратной матрицы имеет место следующее свойство:

$$\det(zI - A + BK) \det(zI - A + LC) = 0,$$

т. е. собственные числа этой матрицы представляют собой две группы, первая из которых – это группа желаемых корней синтезируемой системы, вторая – группа желаемых корней наблюдателя, используемого для оценки вектора состояния объекта.

Динамика полной системы с регулятором и наблюдателем описывается двумя независимыми наборами корней:

- желаемые корни системы реализуются с помощью матрицы  $K$ ;
- желаемый набор корней наблюдателя состояния реализуется с помощью матрицы обратных связей  $L$ .

Оба набора корней можно формировать независимо друг от друга.

Отметим, что наблюдатель – неуправляемая подсистема.

## 7.7. РЕАЛИЗАЦИЯ ТИПОВЫХ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

### 7.7.1. НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ

В инженерной практике систем с обратной связью широкое распространение получили так называемые ПИД-регуляторы (пропорциональный – интегрирующий – дифференцирующий) (рис. 7.40).

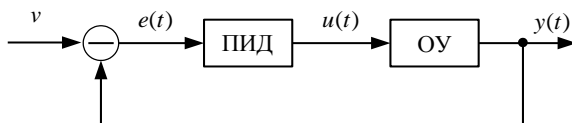


Рис. 7.40. Функциональная схема системы с ПИД-регулятором

Непрерывная реализация ПИД-регулятора (7.41) описывается уравнением

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_{\text{и}}} \int_0^t e(t) dt + T_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt} \right). \quad (7.87)$$

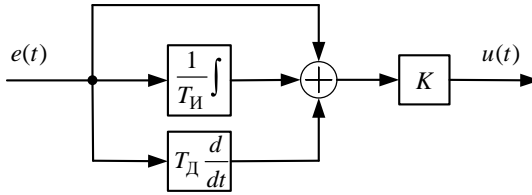


Рис. 7.41. Структурная реализация непрерывного ПИД-регулятора

Пропорциональная и интегрирующая компоненты ПИД-регулятора обеспечивают требуемые статические свойства замкнутой системы, а дифференцирующая – позволяет увеличить запас устойчивости.

### 7.7.2. ЦИФРОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Для построения цифровой реализации в соответствии с выражением (7.87) воспользуемся приближенной процедурой интегрирования по методу прямоугольников и первой разностью для реализации процедуры дифференцирования:

$$u(kT) = K \left( e(kT) + \frac{1}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(iT)T + T_D \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} \right). \quad (7.88)$$

С точки зрения цифровой реализации удобнее не прямой алгоритм, а рекуррентный, поэтому найдем управление на предыдущем шаге:

$$u(kT - T) = K \left( e(kT - T) + \frac{1}{T_I} \sum_{i=0}^{k-2} e(iT)T + T_D \frac{e(kT - T) - e(kT - 2T)}{T} \right), \quad (7.89)$$

затем – разность между текущим управлением (7.88) и управлением на предыдущем шаге (7.89) и с помощью этой разности построим рекуррентную процедуру вычисления управления:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2), \quad (7.90)$$

где  $q_0 = \left( K + K \frac{T_D}{T} \right)$ ;  $q_1 = \left( -K + K \frac{T}{T_I} - 2K \frac{T_D}{T} \right)$ ;  $q_2 = K \frac{T_D}{T}$ .

Представим управление (7.90) в операторной форме:

$$1 - z^{-1} u(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} e(z).$$

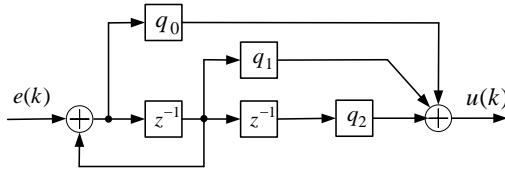


Рис. 7.42. Структурная реализация цифрового ПИД-регулятора

Найдем передаточную функцию цифрового ПИД-регулятора (рис. 7.42):

$$W_{\text{ПИД}}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

и в окончательном виде

$$W_{\text{ПИД}}(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - z}.$$

### 7.7.3. МОДИФИКАЦИИ ЦИФРОВОГО ПИД-РЕГУЛЯТОРА

**Первая модификация** связана с использованием более точной процедуры интегрирования по методу трапеций в выражении (7.88):

$$u(k) = K \left[ e(k) + \frac{T}{T_{\text{и}}} \left( \frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right) + \frac{T_{\text{д}}}{T} e(k) - e(k-1) \right].$$

Для получения рекуррентной процедуры найдем управление на предыдущем шаге:

$$u(k-1) = K \left[ e(k-1) + \frac{T}{T_{\text{и}}} \left( \frac{e(0) + e(k-1)}{2} + \sum_{i=1}^{k-2} e(i) \right) + \frac{T_{\text{д}}}{T} e(k-1) - e(k-2) \right],$$

тогда рекуррентная процедура вычисления управления, аналогичная (7.88), примет вид

$$u(k) = u(k-1) + \Delta(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2).$$

Итоговое выражение для управления не изменилось, но изменились выражения для вычисления коэффициентов  $q_i$ :

$$q(0) = K \left( 1 + \frac{T}{2T_{\text{и}}} + \frac{T_{\text{д}}}{T} \right); \quad q(1) = K \left( -1 + \frac{T}{2T_{\text{и}}} - \frac{2T_{\text{д}}}{T} \right); \quad q(2) = K \frac{T_{\text{д}}}{T}.$$

**Вторая модификация**, цель которой – уменьшить «рывки» в управляющем воздействии. Исключаем для этого в дифференцирующей компоненте входное задающее воздействие:

$$u(k) = K \left[ e(k) + \frac{T}{T_{\text{и}}} \left( \frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right) + \frac{T_{\text{д}}}{T} -y(k) + y(k-1) \right],$$

тогда

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + g_0 y(k) + g_1 y(k-1) + g_2 y(k-2),$$

где  $q_0 = K \left( 1 + \frac{T}{2T_{\text{и}}} \right); \quad q_1 = K \left( -1 + \frac{T}{2T_{\text{и}}} \right); \quad g_0 = -K \frac{T_{\text{д}}}{T}; \quad g_1 = 2K \frac{T_{\text{д}}}{T}; \quad g_2 = -K \frac{T_{\text{д}}}{T}.$

**Третья модификация** связана с реализацией дифференцирующей компоненты ПИД-регулятора. Передаточная функция непрерывного дифференцирующего фильтра первого порядка имеет вид

$$W_{\text{д}}(p) = \frac{T_{\text{д}} p}{\mu p + 1},$$

тогда передаточная функция непрерывного ПИД-регулятора:

$$W_{\text{ПИД}}(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{и}}} \frac{1}{p} + \frac{T_{\text{д}} p}{\mu p + 1} \right). \quad (7.91)$$

Для перехода к дискретной реализации такого ПИД-регулятора существует две возможности.

Первая возможность – преобразование Тастина (см. подразд. 7.2.17).  
Заменяем оператор дифференцирования в (7.91) на

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

Вторая возможность – применить к выражению (7.91) Z-преобразование (см. подразд. 7.2.6):

$$W_{\text{ПИД}}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{ПИД}}(p)}{p} \right\}.$$

### 7.7.4. О НАСТРОЙКЕ ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Для настройки ПИД-регулятора разработан метод Циглера–Николса [41]. Этот метод применим только для устойчивого объекта, примерная переходная характеристика которого показана на рис. 7.43. Передаточная функция такого объекта:

$$W(p) = \frac{K_0}{T_0 p + 1} e^{-p\tau}.$$

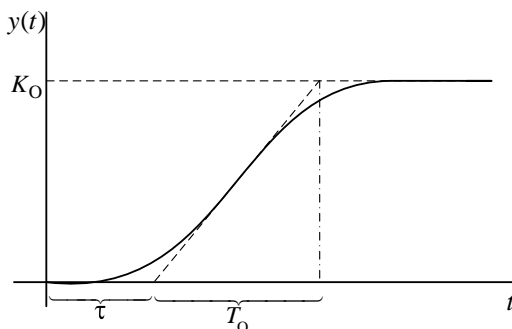


Рис. 7.43. Примерная переходная функция объекта управления

В приложении 3 приведены расчетные соотношения для вычисления параметров П, ПИ и ПИД-регуляторов для этого объекта.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе изучены вопросы линейной теории импульсных систем управления. Приведены способы перехода от непрерывных моделей объектов управления к дискретным, рассмотрены динамические характеристики импульсных систем, вопросы анализа устойчивости и качества процессов в таких системах.

Особое внимание уделено синтезу дискретных регуляторов, в основу которого положен модальный метод. Приведены два способа синтеза: по выходу и по состоянию. Второй способ предполагает использование в обратной связи оценки вектора состояния, которую можно получить с помощью специальной динамической подсистемы, называемой наблюдателем. Рассмотрены два способа реализации наблюдателей: операторный, в котором используется модель объекта в виде дискретной передаточной функции, и матричный, в котором используется модель объекта, представленная в виде системы разностных уравнений.

Заключительная часть главы посвящена цифровой реализации типовых ПИД-регуляторов.

## ЗАДАЧИ

**7.1.** Перейти от непрерывной передаточной функции

$$W(p) = \frac{p+1}{4p^2 + p+1}$$

к разностному уравнению, используя матричную процедуру перехода, при заданной величине шага квантования по времени  $T = 0,1$  с.

**7.2.** Перейти от дифференциального уравнения  $\dot{x}(t) = 2x(t) + 3u(t)$  к разностному уравнению методом конечных разностей, при заданной величине шага дискретизации по времени  $T = 0,5$  с.

**7.3.** Найти дискретную передаточную функцию по заданному разностному уравнению

$$2y(k+1) + 3y(k) = 5u(k).$$

**7.4.** Найти дискретную передаточную функцию по заданной системе разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + 2u(k), \\ y(k) = x_1(k) + 2x_2(k). \end{cases}$$

**7.5.** Перейти от дискретной передаточной функции

$$W(z) = \frac{6z^2 + 5z + 4}{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}$$

к разностному уравнению.

**7.6.** Перейти от заданного разностного уравнения третьего порядка к системе разностных уравнений. Изобразить структурную схему системы, реализованную на звеньях задержки

$$y(k+3) + 2y(k+2) + 3y(k+1) + y(k) = 2u(k+2) + 3u(k+1) + 4u(k).$$

**7.7.** Модель объекта задана системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0,8x_1 + x_2 + 0,15u, \\ \dot{x}_2 = -0,15x_1 + 0,2u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Используя  $Z$ -преобразование, найти передаточную функцию объекта при шаге квантования по времени  $T = 0,5$  с. Составить структурную схему системы на звеньях задержки.

**7.8.** Модель объекта задана передаточной функцией  $W(p) = \frac{6}{p}$ . Ис-

пользуя  $Z$ -преобразование, найти дискретную передаточную функцию  $W(z)$  при шаге дискретизации по времени  $T = 0,1$  с.

**7.9.** Модель непрерывной динамической системы задана дифференциальным уравнением  $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{u} + 3u$ .

Используя преобразование Тастина, найти дискретную модель объекта, записать ее передаточную функцию  $W(z)$  и составить структурную схему дискретной системы на звеньях задержки. Шаг дискретизации  $T = 0,1$  с.

**7.10.** Проверить устойчивость дискретной системы, математическая модель которой задана дискретной передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,1z^2 + 0,05z + 0,02}{z^3 + 0,48z^2 - 0,82z + 0,8}.$$



**7.11.** Характеристическое уравнение линейной дискретной системы имеет вид  $z^2 + 0,1z - 0,5 = 0$ .

Найти его корни и оценить устойчивость системы, используя билинейное преобразование.

**7.12.** Проверить устойчивость системы, модель которой задана линейным разностным уравнением

$$8y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = 9u(k+1) + 11u(k).$$

**7.13.** Математическая модель дискретного объекта задана системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0,2x_1(k) + 0,06x_2(k) - 0,1u(k), \\ x_2(k+1) = 0,4x_1(k) - 0,12x_2(k). \end{cases}$$

Заданы начальные условия  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = -1$  и управляющее воздействие  $u(k) = 2$ ,  $k = \overline{0,5}$ . Построить траекторию движения изображающей точки на фазовой плоскости.

**7.14.** Рассчитать процесс в дискретной системе, математическая модель которой представлена разностным уравнением  $y(k+2) - 0,2y(k+1) + 0,1y(k) = 0,3u(k+1) - 0,1u(k)$ , при заданных начальных условиях  $y(0) = 0$ ;  $y(-1) = -0,5$  и заданных значениях управляющего воздействия:  $u(0) = 0,4$ ;  $u(1) = 1$ ;  $u(2) = 1$ ;  $u(3) = 1,5$ ;  $u(4) = 2$ ;  $u(5) = 2$ ;  $k = 1, \dots, 6$ .

**7.15.** Проверить свойство управляемости объекта, заданного системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) - x_2(k) + u(k), \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k). \end{cases}$$

**7.16.** Проверить свойство управляемости объекта, заданного системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k), \\ x_3(k+1) = -x_1(k) - x_2(k) - x_3(k) + 2u(k). \end{cases}$$

Найти управление для перевода данной системы из начального состояния  $\{x_1(0), x_2(0), x_3(0)\} = \{1, 1, 1\}$  в состояние  $\{-1, -1, -1\}$  и построить траекторию движения изображающей точки в фазовом пространстве.

**7.17.** Проверить свойство наблюдаемости объекта, заданного передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,1z^2 - 0,15z + 0,05}{z^3 - 0,56z^2 + 0,78z - 0,4}.$$

**7.18.** Проверить свойство наблюдаемости для объекта, заданного системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0,2x_2(k) - 0,4x_3(k) + 0,2u(k), \\ x_2(k+1) = 0,4x_1(k) + 0,3x_2(k) + 0,5x_3(k) + 0,1u(k), \\ x_3(k+1) = -0,2x_1(k) + 0,3x_2(k) - 0,5x_3(k) + 0,5u(k), \\ y(k) = x_1(k) - x_2(k) + 2x_3(k). \end{cases}$$

По известным значениям входа и выхода данной системы требуется найти ее начальное состояние  $\{x_1(0), x_2(0), x_3(0)\}$ , где  $y(0) = 0$ ;  $y(1) = 0,5$ ;  $y(2) = 1$ ;  $u(0) = 2$ ;  $u(1) = 1$ .

Проверить свойство наблюдаемости объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,2z^2 + 0,06z - 0,008}{z^3 - 0,6z^2 + 0,25z - 0,02}.$$

**7.19.** Для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,22z + 0,18}{z^2 - z - 0,9},$$

выполнить синтез регулятора, используя астатическую процедуру модального метода синтеза по выходу, изобразить структурную схему синтезированной системы. Желаемые свойства заданы корнями:  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 0,2$ ;  $z_3 = 0,04$ .

**7.20.** Для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,1z^2 - 0,05z + 0,02}{z^3 + 0,6z^2 - 1,82z + 0,8},$$

выполнить синтез статического регулятора, используя статическую процедуру модального метода синтеза по выходу, изобразить структурную схему синтезированной системы. Желаемая динамика системы задана корнями  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 0,2$ ;  $z_3 = 0,5$ .

**7.21.** Для объекта, математическая модель которого задана системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0,1x_1(k) + 0,2x_2(k) + 0,1u(k), \\ x_2(k+1) = -0,2x_1(k) - 0,3x_2(k) + 0,2u(k), \\ y(k) = x_1(k) + 0,1x_2(k). \end{cases}$$

выполнить синтез астатического регулятора, используя астатическую процедуру модального метода синтеза по состоянию, изобразить структурную схему синтезированной системы, реализованную на звеньях задержки. Процессы в замкнутой системе должны быть минимальной длительности.

**7.22.** Для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,25z + 0,12}{z^2 - 1,82z - 0,8},$$

выполнить синтез статического регулятора, используя статическую процедуру модального метода синтеза по состоянию, изобразить структурную схему синтезированной системы, реализованную на звеньях задержки. Процессы в замкнутой системе должны быть минимальной длительности.

**7.23.** Рассчитать наблюдатель пониженного порядка для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,5z^2 + 0,2z + 0,02}{z^3 + 0,6z^2 - 1,2z + 0,8}.$$

Желаемая динамика наблюдателя задана корнями  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 0,1$ .

**7.24.** Рассчитать наблюдатель пониженного порядка для объекта, математическая модель которого имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0,1x_1(k) + 0,4x_2(k) - 0,2x_3(k) + 0,2u(k), \\ x_2(k+1) = -0,3x_2(k) - 0,7x_2(k) + 0,5x_3(k) - 0,1u(k), \\ x_3(k+1) = -0,2x_1(k) - 0,3x_2(k) + 0,5x_3(k) + 0,5u(k), \\ y(k) = 0,5x_1(k). \end{cases}$$

Процессы в наблюдателе должны быть минимальной длительности.

**7.25.** Используя операторную процедуру синтеза наблюдателей, рассчитать наблюдатель для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,2z + 0,12}{0,3z^2 - 0,6z - 1,2}.$$

Желаемая динамика наблюдателя задана корнями:  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 0,1$ ;  $z_3 = 0,1$ .

**7.26.** Используя матричную процедуру синтеза наблюдателей, рассчитать наблюдатель для объекта, математическая модель которого задана передаточной функцией

$$W(z) = \frac{0,3z + 0,2}{0,2z^2 + 0,4z + 0,7}.$$

Желаемая динамика наблюдателя задана корнями:  $z_1 = 0,1$ ;  $z_2 = -0,1$ .

**7.27.** Используя матричную процедуру синтеза наблюдателей, рассчитать наблюдатель для объекта, математическая модель которого задана системой разностных уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0,5x_1(k) - 0,2x_2(k) + 0,5u(k), \\ x_2(k+1) = -0,2x_1(k) + 0,2x_2(k) + 0,3u(k), \\ y(k) = x_1(k) + 0,5x_2(k). \end{cases}$$

Желаемая динамика наблюдателя задана корнями  $z_1 = -0,1$ ;  $z_2 = 0,1$ .

**7.28.** Используя процедуру синтеза наблюдателей пониженного порядка, рассчитать наблюдатель для объекта, математическая модель которого задана системой разностных уравнений в задаче 7.27. Желаемая динамика наблюдателя задана корнем  $z_1 = 0,1$ .

---

---

## Глава 8

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

**В**о всех предыдущих главах мы изучали свойства систем, процессы в которых с достаточной точностью описываются линейными математическими моделями. Однако такие модели справедливы, как правило, только в определенном диапазоне изменения переменных состояния и при других условиях работы могут стать существенно нелинейными.

Ужесточение требований к качеству работы физических систем автоматизации приводит к применению все более сложных математических моделей, которые тем не менее никогда не будут полностью адекватны реальному объекту. Кроме того, характеристики некоторых элементов имеют настолько существенный нелинейный характер, что вообще не могут быть линеаризованы (например, реле с гистерезисом). Таким образом, в ряде ситуаций необходимо применять описание системы с помощью нелинейных математических моделей.

В этой главе мы дадим некоторые принятые определения нелинейных систем, обсудим способы их описания и отметим основные отличительные особенности по сравнению с линейными моделями.

### 8.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Нелинейными системами автоматического управления** будем называть системы, содержащие хотя бы один нелинейный элемент. Различают **статические нелинейные элементы**, которые можно представить в виде нелинейных статических характеристик, и **динамические**, процессы в которых описывают нелинейные дифференциальные уравнения.

Основной динамической характеристикой нелинейных звеньев и систем является нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение. В общем случае поведение многоканальных систем описывают следующие уравнения состояния и выхода:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = g(t, x), & y \in R^m, \quad n \geq m, \end{cases} \quad (8.1)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния;  $u$  –  $m$ -мерный вектор управления;  $y$  –  $m$ -мерный вектор выходных переменных;  $f(t, x, u)$  и  $g(t, x)$  – нелинейные вектор-функции. Зависимость этих функций от  $t$  отражает действие возмущений. Причем под возмущением понимают как влияние окружающей среды, так и изменение параметров объекта.

В частном случае управляющее воздействие может входить в уравнение состояния (8.1) в виде суммы с нелинейными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u, \\ y = g(t, x), \end{cases} \quad (8.2)$$

где  $B(t, x)$  – матрица нелинейных коэффициентов размера  $n \times m$ .

Систему, поведение которой описывают уравнения (8.2), будем называть **нелинейной нестационарной системой с аддитивным управлением**.

Если параметры системы с течением временем не меняются и возмущающие воздействия пренебрежимо малы, то она называется **нелинейной стационарной системой**. Ее модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + B(x)u, \\ y = g(x). \end{cases} \quad (8.3)$$

В случае, когда отсутствует управляющее воздействие в (8.2), система называется **нелинейной нестационарной автономной** и описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ y = g(t, x). \end{cases} \quad (8.4)$$

Если правая часть уравнений (8.4) не зависит от времени  $t$ , то мы будем говорить о **нелинейной стационарной автономной системе**.

## 8.2. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Свойства систем, поведение которых описывают уравнения (8.1)–(8.4), можно интерпретировать графически в пространстве размерности  $n$ . Такое пространство, координатами которого являются переменные состояния  $x$ , называется **пространством состояний**\*

Рассмотрим, как представляется в пространстве состояний поведение системы (8.1)

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

при условии, что  $u = \text{const}$ .

Состоянию системы в произвольный момент времени соответствует конкретная точка пространства состояний  $x(t)$ , которая называется **изображающей точкой системы** (рис. 8.1). С изменением времени эта точка выписывает траекторию, называемую **фазовой траекторией системы**.

Совокупность фазовых траекторий, полученных при движении из различных начальных условий, называют **фазовым портретом системы**. Он позволяет оценить свойства нелинейной системы.

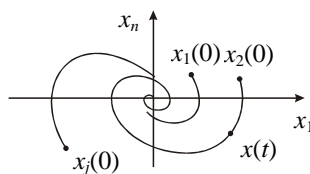


Рис. 8.1. Пример фазового портрета системы

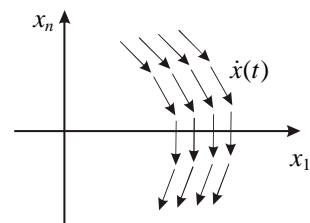


Рис. 8.2. Пример векторного поля системы

В каждый момент времени изображающая точка системы  $x(t)$  имеет определенную скорость  $\dot{x}(t)$ , которую также можно изобразить в пространстве состояний в виде **вектора скорости**, имеющего определенное направление. Совокупность векторов скорости будем называть **векторным полем системы** (рис. 8.2).

Точки пространства состояний, в которых вектор скорости равен нулю

$$\dot{x} = 0, \quad (8.5)$$

представляют собой **точки равновесия** системы.

\* Отметим, что в пространстве состояний можно также исследовать свойства линейных систем, рассмотренных в предыдущих разделах.

### 8.3. КОМБИНИРОВАННОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При составлении математической модели процессов в системе управления предварительно получают описание отдельных элементов в виде соответствующих уравнений, причем по возможности их стараются линеаризовать. Звенья, уравнения которых допускают линеаризацию, образуют линейную часть системы, а устройства, поведение которых описывают нелинейные уравнения, составляют ее нелинейную часть. В результате получают систему с **комбинированным** описанием (рис. 8.3). Здесь НЭ – нелинейная часть системы, которая представляет собой совокупность всех нелинейных звеньев.

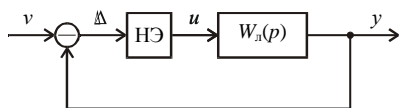


Рис. 8.3. Структурная схема комбинированной системы

Часто в комбинированной системе в качестве НЭ рассматривается статическая нелинейность, где зависимость между входной и выходной величинами описывается соотношением

$$u = f(\Delta). \quad (8.6)$$

Примеры типовых статических нелинейных звеньев приведены на рис. 8.4.

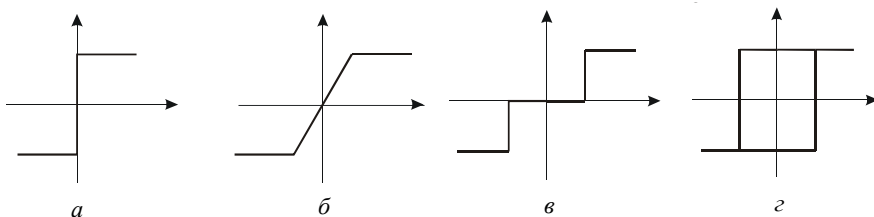


Рис. 8.4. Статические характеристики нелинейных звеньев:

*a* – идеальное реле; *б* – усилитель с ограничением; *в* – реле с зоной нечувствительности; *г* – реле с гистерезисом

Линейная часть системы может иметь структуру любой сложности и описывается передаточной функцией  $W_n(p)$ .



## 8.4. ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим наиболее характерные особенности процессов в нелинейных системах.

- В нелинейных системах вид и качество переходного процесса существенно зависят от величины входного воздействия и начальных условий. Так, увеличение входного воздействия (рис. 8.5) приводит к качественному изменению переходного процесса: из устойчивого он становится неустойчивым.

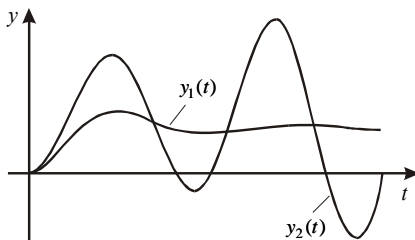


Рис. 8.5. Пример реакции нелинейной системы на изменение входного воздействия ( $u_2 > u_1$ )

Изменение начальных условий также может приводить к существенному различию в переходных процессах, например, к возникновению колебаний (рис. 8.6).

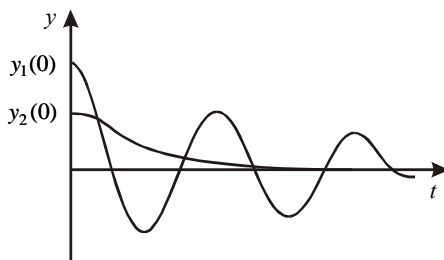


Рис. 8.6. Пример реакции нелинейной системы на изменение начальных условий

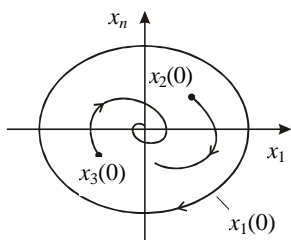


Рис. 8.7. Пример состояний равновесия нелинейной системы

- Важная особенность нелинейных систем состоит в том, что к ним неприменим принцип суперпозиции. Реакцию нелинейной системы автоматического управления на несколько произвольных внешних воздействий нельзя рассматривать как сумму составляющих на каждое воздействие отдельно, поскольку эта реакция зависит от величины входного воздействия и начальных условий.

- Характерной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них **автоколебаний**, т. е. таких собственных периодических процессов, параметры которых (частота и фаза) не зависят от начальных условий.

- В нелинейной системе может быть несколько состояний равновесия, к которым в зависимости от величины начальных условий и входных воздействий стремятся переходные процессы.

На рис. 8.7 показано, что из начального состояния  $x_3(0)$  движение осуществляется к точке равновесия  $x = 0$ , а из состояния  $x_1(0)$  изображающая точка системы движется по замкнутой траектории, которая называется **предельным циклом**. Эта фазовая траектория соответствует равновесному режиму работы системы. Отметим также, что наличие предельного цикла в пространстве состояний означает возможность возникновения в системе автоколебаний.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрели динамические характеристики, которые применяются для описания нелинейных систем. Их и будем использовать при дальнейшем изложении вопросов анализа и синтеза.

Так как в нелинейных системах не выполняется принцип суперпозиции (для отдельных значений входа или состояния он может и выполняться), особое развитие получили методы представления процессов в пространстве состояний, которыми мы и будем пользоваться для иллюстрации различных свойств таких систем.

---

---

## Глава 9

# УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

**В** этой главе мы рассмотрим основные методы исследования устойчивости нелинейных систем, которые существенно отличаются от способов анализа линейных систем. В первую очередь, это связано с тем, что свойство устойчивости нелинейной системы зависит от начальных условий и внешних воздействий: при одних входных сигналах система будет устойчивой, а при других она станет неустойчивой. Следовательно, для их анализа нельзя применять разработанные в линейной теории критерии устойчивости.

Устойчивость нелинейной системы автоматического управления означает, что малые изменения возмущений или начальных условий не выведут выходную переменную за пределы достаточно малой окрестности точки равновесия или предельного цикла. Поскольку для нелинейной системы могут существовать несколько положений равновесия, анализировать устойчивость следует в окрестности каждого из них.

Проблема устойчивости нелинейных систем имеет сравнительно давнюю и очень интересную историю развития. Следует отметить, что основная тематика исследований формировалась вокруг идей русского ученого А.М. Ляпунова [28], которые в дальнейшем были развиты в работах [4, 7, 16, 27–30]. Однако эти способы анализа устойчивости нелинейных систем дают, как правило, достаточные условия, поэтому для них трудно ввести понятие запаса устойчивости, применяемое в линейном случае и очень важное для проектирования систем.

## 9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Поскольку поведение нелинейной системы существенно зависит от величины внешних воздействий, их численные значения всегда оговариваются при анализе ее свойств. Исследуем понятие устойчивости для автономной стационарной системы, уравнение состояния которой имеет вид

$$\dot{z} = \varphi(z), \quad z \in R^n. \quad (9.1)$$

Обычно нас интересует устойчивость относительно равновесного режима  $z^0$ . Задачу анализа можно свести к проверке устойчивости системы относительно начала координат в пространстве новых переменных. С этой целью введем вектор переменных  $x$ , в качестве которых выберем отклонение от состояния равновесия

$$x = z - z^0. \quad (9.2)$$

Дифференцируя (9.2) по времени, получим уравнения состояния для новых переменных

$$\dot{x} = \dot{z} - \dot{z}^0 = \varphi(x + z^0),$$

которые запишем в виде

$$\dot{x} = f(x). \quad (9.3)$$

В пространстве состояний  $x$  согласно (9.2) и (9.3) точка равновесия совпадает с началом координат, т. е.

$$f(0) = 0. \quad (9.4)$$

Рассмотрим теперь условия устойчивости автономной системы (9.3) относительно точки  $x = 0$ .

Положение равновесия системы называется **асимптотически устойчивым**, если при движении из начальных условий имеет место свойство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(0) \in R^n. \quad (9.5)$$

Условие (9.5) означает, что с течением времени фазовые траектории системы «стягиваются» к началу координат (рис. 9.1). При неустойчивом движении фазовая траектория удаляется от точки равновесия или вырождается в предельный цикл.

В зависимости от значений  $x(0)$ , для которых выполняется условие (9.5), различают устойчивость «в малом» и «в большом».

Состояние равновесия системы называется **асимптотически устойчивым «в малом»**, если существует, пусть как угодно малая, окрестность положения равновесия, где это свойство имеет место.

Состояние равновесия системы называется **асимптотически устойчивым «в большом»**, если условие (9.5) выполняется для любых начальных условий из рабочей области пространства состояний.

Состояние равновесия системы называется **экспоненциально устойчивым**, если оно устойчиво асимптотически и выполняется условие

$$\|x(t)\| \leq c \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \quad (9.6)$$

где  $c = \text{const} > 0$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ .

В зависимости от начальных условий можно также выделить экспоненциальную устойчивость «в малом» и «в большом».

Отметим, что для систем автоматики важно наличие именно экспоненциальной устойчивости, которая гарантирует, кроме сходимости, и скорость переходных процессов (с показателем  $\alpha$ ). Свойства асимптотической устойчивости недостаточно для работы реальных систем.

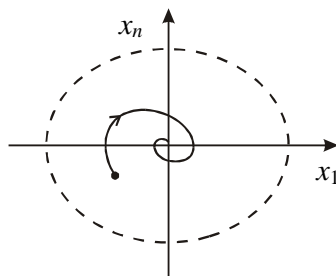


Рис. 9.1. Иллюстрация асимптотически устойчивого состояния равновесия

## 9.2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

В некоторых случаях устойчивость состояния равновесия нелинейной системы можно исследовать по уравнениям первого приближения, полученным в результате линеаризации уравнений состояния в малой окрестности точки равновесия. Такой способ был предложен А.М. Ляпуновым.

Рассмотрим этот подход для нелинейной автономной стационарной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0. \quad (9.7)$$

Разложим  $f(x)$  в ряд Тейлора в малой окрестности состояния равновесия:

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x=0} x + R(x), \quad (9.8)$$

где  $R(x)$  – члены ряда разложения выше первой степени; матрица частных производных  $\partial f / \partial x^T$  имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (9.9)$$

Отбрасывая члены ряда разложения  $R(x)$ , вместо (9.8) получим

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x=0} x. \quad (9.10)$$

Матрица частных производных (9.9) рассматривается в точке равновесия, поэтому представляет собой числовую матрицу коэффициентов, для которой введем обозначение

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0}. \quad (9.11)$$

С учетом (9.11) окончательно уравнение первого приближения системы (9.10) принимает вид

$$\dot{x} = Ax, \quad (9.12)$$

т. е. соответствует описанию линейной автономной системы.

Согласно теореме, доказанной А.М. Ляпуновым, устойчивость исходной системы (9.7) связана с устойчивостью линеаризованной системы (9.12).

**Теорема.** *Если линеаризованная система устойчива, то исходная нелинейная система будет асимптотически устойчивой «в малом» относительно исследуемого состояния равновесия.*

Доказательство приводится, например, в [27–30].

При неустойчивой линеаризованной системе процессы в исходной нелинейной системе будут также неустойчивыми.

Если линеаризованная система находится на границе устойчивости (корни нулевые или мнимые), то об устойчивости нелинейной системы ничего нельзя сказать. Это критический случай, и нужны дополнительные исследования для окончательного суждения об устойчивости нелинейной системы (9.7), которую определяют члены высшего порядка ряда разложения  $R(x)$ .

#### ПРИМЕР 9.1

По линейному приближению оценить устойчивость относительно одного из положений равновесия системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2 - 2u, \quad u = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнения равновесия системы

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 - 2x_2, \\ 0 = x_1x_2 - x_2, \end{cases}$$

откуда определим одну из точек равновесия:  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = 0$ . В ее малой окрестности линеаризуем исходную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x^0} x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x^0} x_2 = 2x_1 \quad x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x^0} x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x^0} x_2 = (x_2 - 1) \quad x_1 + x_1 \quad x_2, \end{cases}$$

которая принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Матрица линеаризованной системы следующая:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем для нее характеристическое уравнение

$$\det(pI - A) = \det \begin{bmatrix} p & 2 \\ 1 & p \end{bmatrix} = p^2 - 2.$$

Как видим, линеаризованная система неустойчива, следовательно, исходная система также неустойчива.

## 9.3. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

### 9.3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Одним из наиболее эффективных способов исследования устойчивости является второй метод Ляпунова (часто его называют также прямым методом Ляпунова), который не требует решения дифференциального уравнения.



Метод основан на идее замены анализа решений нелинейных уравнений произвольного порядка на оценку свойств этих решений с помощью скалярного дифференциального неравенства. При этом теряется информация о виде решений, но приобретает простота анализа устойчивости, поскольку исследуется изменение «расстояния» в пространстве состояний от текущей точки системы до начала координат. В качестве такой оценки расстояния можно использовать скалярную функцию переменных состояния, которую обозначим через  $V(x)$ .

Понятно, что в случае устойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0 \quad (9.13)$$

с течением времени «стягиваются» к началу координат (рис. 9.2, *а*), при этом уменьшается расстояние от текущей точки до точки равновесия.

Относительно неустойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы (9.13) расходятся (рис. 9.2, *б*), а расстояние увеличивается с течением времени.

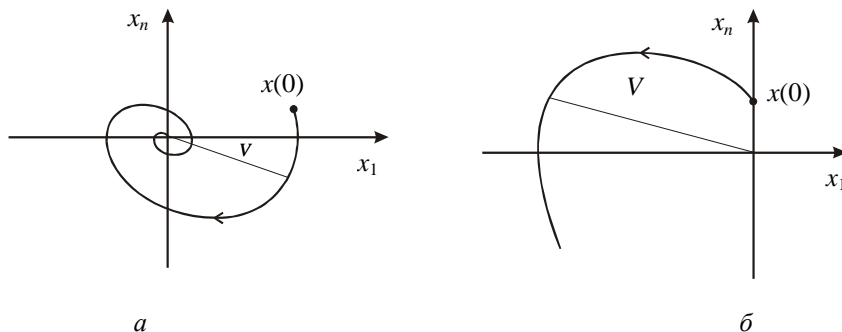


Рис. 9.2. Изменение функции  $V$  в случае устойчивой (*а*) и неустойчивой (*б*) систем

Таким образом, суть второго метода Ляпунова сводится к оценке изменения некоторой функции координат состояния системы  $V(x)$  вдоль траекторий движения, которую для простоты называют **функцией Ляпунова**. Обсудим формальные свойства функций  $V(x)$ , используемые в дальнейшем.

Рассмотрим функции  $V(x)$ , определенные и непрерывные в некоторой области пространства состояний  $D$ , содержащей начало координат, и обладающие в этой области непрерывными частными производными по переменным  $x$ .

Функция  $V(x)$  называется **положительно-определенной** в области  $D$ , если она положительна для любых значений переменных из этой области и обращается в нуль только в начале координат, т. е. выполняются свойства

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (9.14)$$

Функция переменных состояния называется **отрицательно определенной** в области  $D$ , если она отрицательна для любых значений переменных из этой области и обращается в нуль только в начале координат.

**Полной производной функции Ляпунова в силу системы** (производной функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы (9.13)) называется функция  $\dot{V}(x)$ , которая определяется следующим образом:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x). \quad (9.15)$$

Здесь  $\frac{\partial V}{\partial x^T} = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$  – вектор-строка частных производных.

Полная производная функции Ляпунова представляет собой скалярное произведение вектор-строки  $\partial V / \partial x^T$  и вектор-столбца  $f(x)$  и может быть представлена в развернутой форме:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x).$$

Следует отметить, что полная производная функции Ляпунова  $\dot{V}(x)$ , так же как и сама функция Ляпунова  $V(x)$ , тождественно обращается в нуль в начале координат, поскольку  $f(0) = 0$ .

### 9.3.2. ТЕОРЕМЫ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Рассмотрим теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости состояния равновесия автономной системы.

**Теорема об асимптотической устойчивости** [1, 11–13]. *Состояние равновесия системы является асимптотически устойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова  $V(x)$  ее полная производная в силу системы (9.13) есть отрицательно-определенная функция, т. е. при выполнении формальных соотношений*

$$\begin{cases} V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, & V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0, & \dot{V}(0) = 0. \end{cases} \quad (9.16)$$

**Теорема об экспоненциальной устойчивости** [1]. *Состояние равновесия системы (9.13) будет экспоненциально устойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова  $V(x)$  ее полная производная в силу системы есть отрицательно определенная функция и обе эти функции удовлетворяют следующим квадратичным ограничениям:*

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|^2 &\leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2, \\ \dot{V}(x) &\leq -c_3 \|x\|^2, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где  $c_i = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ .

**Теорема о неустойчивости** [1, 11–13]. *Состояние равновесия системы (9.13) является неустойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова  $V(x)$  ее полная производная в силу исследуемой системы представляет собой также положительно определенную функцию.*

Поскольку от функции  $V(x)$  требуется только знакоопределенность, для одной и той же системы (9.13) можно выбирать различные функции Ляпунова, которые могут привести к «широким» или «узким» областям устойчивости.

Приведенные теоремы дают только достаточные, но не необходимые условия устойчивости и неустойчивости и не указывают способы нахождения подходящих функций  $V(x)$ , в чем и заключается основная сложность применения второго метода Ляпунова.

Таким образом, если не выполняются условия ни одной из приведенных теорем, то об устойчивости системы (9.13) ничего сказать нельзя. Нужно пытаться подобрать другую, более подходящую, функцию Ляпунова.

### ПРИМЕР 9.2

С помощью второго метода Ляпунова оценить устойчивость системы, поведение которой описывают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + u. \end{cases}$$

Полагаем  $u = 0$  и рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Выберем для нее в качестве функции Ляпунова следующую функцию:

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0, \\ V(0) &= 0. \end{aligned}$$

Определим теперь полную производную функции Ляпунова вдоль траектории движения автономной системы

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 10x_2^2 = -10x_2^2.$$

Полная производная функции Ляпунова не является отрицательно-определенной функцией, поскольку обращается в нуль не только в начале координат пространства состояний, но и на всей оси  $x_1$ . Это означает, что не выполняются условия ни одной из приведенных теорем. Следовательно, об устойчивости положения равновесия системы сказать ничего нельзя, функция Ляпунова выбрана неудачно.

Попробуем оценить устойчивость системы с помощью новой функции

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0,$$

для которой определим полную производную

$$\dot{V}(x) = 2(x_1 + x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2.$$

В это выражение вместо производных переменных состояния подставим правые части уравнений автономной системы:

$$\dot{V}(x) = -2x_1^2 - 10x_1x_2 - 8x_2^2.$$

Как видим, полная производная новой функции Ляпунова есть отрицательно определенная функция. Следовательно, исходная система является асимптотически устойчивой.

### 9.3.3. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Второй метод Ляпунова можно применять для анализа устойчивости линейных систем, причем в этом случае он дает необходимое и достаточное условие устойчивости.

Рассмотрим линейную автономную систему, поведение которой описывают уравнения состояния (9.12):

$$\dot{x} = Ax.$$

Выберем для нее в качестве функции Ляпунова квадратичную форму вида

$$V(x) = x^T Bx, \quad (9.18)$$

где  $B$  – матрица размера  $n \times n$ . Определим полную производную функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x}$$

или

$$\dot{V}(x) = (Ax)^T Bx + x^T BAx.$$

После преобразований получим в нужной форме

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T B + BA)x. \quad (9.19)$$

Как видим, полная производная функции Ляпунова (9.19) также имеет квадратичную форму, матрицу которой обозначим буквой  $C$ .

**Теорема.** Для того чтобы линейная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы решение уравнения

$$C = A^T B + BA \quad (9.20)$$

порождало положительно определенную матрицу  $B$  при любой отрицательно определенной матрице  $C$ .

Доказательство теоремы приведено, например, в [4]. Уравнение (9.20) называют **матричным уравнением Ляпунова**.

В линейной алгебре для оценки знака квадратичной формы применяется **критерий Сильвестра**: матрица

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

будет положительно определенной, когда все ее главные диагональные миноры положительны ( $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ). Здесь

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \det B.$$

Если все нечетные миноры отрицательные, а четные положительные ( $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 < 0, \dots$ ), то матрица  $B$  будет отрицательно определенной.

На основе теоремы Ляпунова можно предложить следующую процедуру проверки устойчивости линейных систем.

1. задается отрицательно определенная матрица  $C$ , причем в качестве  $C$  удобно выбирать отрицательную единичную диагональную матрицу

$$C = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Записывается матрица  $B$  в виде

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. Формируется матричное уравнение Ляпунова (9.20), которое принимает форму

$$A^T B + BA = -I.$$

4. Приравняются соответствующие элементы матриц из левой и правой частей уравнения Ляпунова. Формируется система линейных алгебраических уравнений, вычисляются неизвестные коэффициенты  $b_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, n}$ .

5. Определяется знак матрицы  $B$ , что позволяет в соответствии с теоремами Ляпунова сделать вывод об устойчивости системы.

### ПРИМЕР 9.3

Определить устойчивость замкнутой системы вторым методом Ляпунова, если известна ее модель в виде передаточной функции

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2}{5p^2 - 4p + 1}.$$

Запишем соответствующее ей дифференциальное уравнение

$$5\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 2u,$$

которое представим в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -0,2x_1 + 0,8x_2 + 0,4u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Матрица  $A$  для системы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,2 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Выберем в качестве матрицы  $C$  отрицательную единичную диагональную матрицу и запишем матричное уравнение Ляпунова

$$\begin{bmatrix} 0 & -0,2 \\ 1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

где  $B$  – матрица функции Ляпунова, коэффициенты которой связаны соотношениями

$$\begin{cases} -0,2b_{21} - 0,2b_{12} = -1, \\ b_{12} + 0,8b_{22} + b_{21} + 0,8b_{22} = -1, \\ -0,2b_{22} + b_{11} + 0,8b_{12} = 0, \\ b_{12} = b_{21}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$B = \begin{bmatrix} -2,75 & 2,5 \\ 2,5 & -3,75 \end{bmatrix}.$$

Оценим знак матрицы  $B$  с помощью критерия Сильвестра, для чего вычислим определители

$$\Delta_1 = |b_{11}| = -2,75 < 0,$$

$$\Delta_2 = |B| = 4,0625 > 0.$$

Таким образом, матрица  $B$  является отрицательно определенной, а исходная система будет неустойчива.

### 9.3.4. ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для нелинейных систем отдельного класса можно предложить достаточно простой способ проверки устойчивости с помощью второго метода Ляпунова.

Рассмотрим автономные системы (9.13)

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0 \quad (9.21)$$

с однозначными нелинейными элементами вектор-функции  $f(x)$ .

Введем новую переменную  $z \in R^n$  в виде

$$z = f(x).$$



Дифференцируя ее по времени  $\dot{z} = \partial f / \partial x^T \dot{x}$ , с учетом (9.21) получим уравнение

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x^T} z. \quad (9.22)$$

Обозначим здесь матрицу частных производных

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

и запишем дифференциальное уравнение состояния (9.22) в следующей форме:

$$\dot{z} = A(x)z. \quad (9.23)$$

Как видим, (9.23) представляет собой квазилинейное уравнение для переменной  $z$ . Для анализа устойчивости такой системы используем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы (9.18)

$$V(z) = z^T Bz$$

с единичной диагональной матрицей,  $B = I$ , т. е.

$$V(z) = z^T z. \quad (9.24)$$

Определим полную производную функции Ляпунова (9.24) по времени

$$\dot{V}(z) = z^T \dot{z} + \dot{z}^T z$$

в силу системы (9.23)

$$\dot{V}(z) = z^T A(x)z + z^T A^T(x)z.$$

После несложных преобразований получим окончательно

$$\dot{V}(z) = z^T \left[ A(x) + A^T(x) \right] z. \quad (9.25)$$

Согласно теореме Ляпунова исходная система будет асимптотически устойчива, если производная (9.25) будет отрицательно определенной функцией. Поскольку полная производная функции Ляпунова имеет квадратичную форму, ее знак определяется знаком матрицы

$$\left[ A(x) + A^T(x) \right], \quad (9.26)$$

который и следует проверить для анализа устойчивости системы (9.21).

#### ПРИМЕР 9.4

Проверить устойчивость системы, поведение которой описывает уравнение

$$\dot{x} = -5x - x^3.$$

Функция  $f(x) = -5x - x^3$  однозначная, поэтому введем новую переменную

$$z = -5x - x^3,$$

для которой запишем дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = A(x)z,$$

где  $A(x) = -5 - 3x^2$ .

Выбирая в качестве функции Ляпунова квадратичную форму (9.24), получим ее полную производную в виде (9.25). Оценим знак функции

$$A(x) + A^T(x) = 2A(x) = -10 - 6x^2.$$

Эта функция отрицательная во всем диапазоне изменения  $x$ . Следовательно, система асимптотически устойчива.

Заканчивая обсуждение второго метода Ляпунова, отметим, что он дает достаточные условия устойчивости. При этом «запас» устойчивости может быть очень большим, но оценить его количественно удастся лишь для частных классов систем. По этой причине второй метод Ляпунова чаще всего используется при выводе вторичных критериев устойчивости.

## 9.4. ЧАСТОТНЫЙ СПОСОБ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

### 9.4.1. ТЕОРЕМА ПОПОВА ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для исследования устойчивости систем со статической нелинейной характеристикой, удовлетворяющей определенным ограничениям, В.М. Поповым был предложен простой способ [6, 30], аналогичный частотным методам анализа устойчивости линейных систем.

Этот способ позволяет оценить так называемую **абсолютную устойчивость**, т. е. экспоненциальную устойчивость «в малом» при любой форме нелинейности из ограниченного диапазона.

Обсудим суть метода для системы, структурная схема которой изображена на рис. 9.3 при условии, что  $v = 0$ .

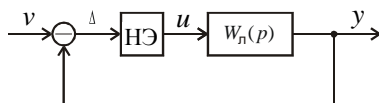


Рис. 9.3. Структурная схема комбинированной системы

Нелинейный элемент (НЭ) представляет собой однозначную статическую характеристику произвольного вида, удовлетворяющую ограничениям

$$0 < f(\Delta) < k\Delta, \quad (9.27)$$

что соответствует заштрихованным секторам на рис. 9.4.

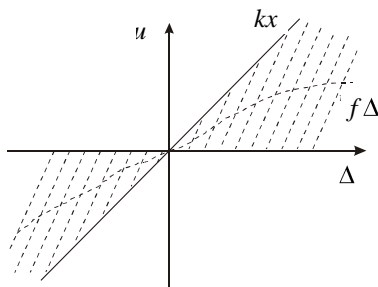


Рис. 9.4. Пример ограничений на нелинейность

Все линейные звенья системы объединены в одно с передаточной функцией  $W_{\text{л}}(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ , причем линейная часть должна быть устойчива, т. е.  $\operatorname{Re} \Lambda A(p) = 0 < 0$ .

Приведем без доказательства формулировку **теоремы** [6]. *Нелинейная система будет абсолютно устойчива, если можно подобрать такое конечное вещественное число  $h$ , при котором выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} \left[ (1 + j\omega h) W_{\text{л}}(j\omega) + \frac{1}{k} \right] > 0, \quad (9.28)$$

где  $W_{\text{л}}(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$  – амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы.

#### 9.4.2. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЙ ТЕОРЕМЫ

На практике вместо условия (9.28) удобно использовать его графическую интерпретацию. С этой целью подставим в неравенство значение  $W_{\text{л}}(j\omega)$ :

$$\operatorname{Re} \left\{ R(\omega) - \omega h I(\omega) + j I(\omega) + \omega h R(\omega) + \frac{1}{k} \right\} > 0.$$

В результате преобразований получим

$$R(\omega) - \omega h I(\omega) + \frac{1}{k} > 0. \quad (9.29)$$

Введем **видоизмененную амплитудно-фазовую частотную характеристику**

$$W^*(j\omega) = R^*(\omega) + jI^*(\omega), \quad (9.30)$$

где  $R^*(\omega) = R(\omega)$ ;  $I^*(\omega) = \omega T_0 I(\omega)$ ,  $T_0 = 1$  с – нормирующий множитель. Это позволяет записать неравенство (9.29) в виде

$$R^*(\omega) - h I^*(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (9.31)$$

Если теперь вместо (9.31) записать равенство

$$R^*(\omega) - h I^*(\omega) = -\frac{1}{k}, \quad (9.32)$$

то получим уравнение прямой на комплексной плоскости, которая проходит через точку с координатами  $-1/k, j \cdot 0$ . Ее наклон зависит от численного значения  $h$ .

С учетом (9.32) можно предложить следующую формулировку **графической интерпретации условий теоремы В.М. Попова**. *Нелинейная система будет абсолютно устойчивой, если можно подобрать хотя бы одну прямую, проходящую через точку комплексной плоскости с координатами  $-1/k, j \cdot 0$  так, чтобы видоизмененная амплитудно-фазовая характеристика линейной части  $W^*(j\omega)$  находилась справа от этой прямой.*

На рис. 9.5, а приведен пример расположения  $W^*(j\omega)$ , соответствующего абсолютной устойчивости системы.

Отметим, что в этом случае нелинейная система будет устойчива при любой нелинейной характеристике, удовлетворяющей условию (9.27).

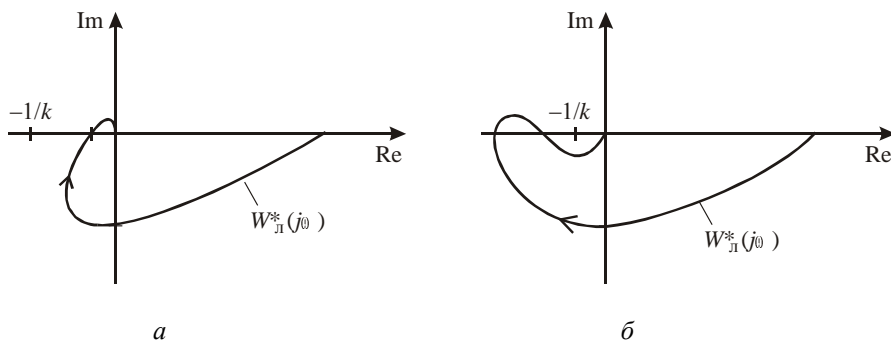


Рис. 9.5. Пример выполнения (а) и невыполнения (б) условий абсолютной устойчивости

Если не выполняется условие (9.31), то видоизмененная амплитудно-фазовая характеристика линейной части  $W^*(j\omega)$  может иметь вид, показанный на рис. 9.5, б. В этом случае через характерную точку  $-1/k, j \cdot 0$  невозможно провести прямую, соответствующую графической интерпретации теоремы.

Таким образом, нелинейная система не будет абсолютно устойчивой, однако может быть асимптотически устойчивой при конкретной нелинейной характеристике. Для проверки этого условия следует воспользоваться, например, вторым методом Ляпунова.

### 9.4.3. ПРОЦЕДУРА ПРОВЕРКИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Процедура проверки абсолютной устойчивости включает следующие этапы.

1. Оценивается диапазон изменения однозначной статической нелинейной характеристики комбинированной системы, определяется значение коэффициента  $k$ .

2. Проверяется устойчивость линейной части системы, записывается выражение для ее амплитудно-фазовой характеристики  $W_{\text{л}}(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ .

3. Определяется выражение для видоизмененной амплитудно-фазовой характеристики  $W^*(j\omega)$  согласно соотношениям

$$\begin{cases} R^*(\omega) = R(\omega), \\ I^*(\omega) = \omega T_0 I(\omega), \quad T_0 = 1 \text{ с.} \end{cases}$$

4. На комплексной плоскости строится видоизмененная амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы  $W^*(j\omega)$  и выделяется характерная точка с координатами  $(-1/k, j \cdot 0)$ .

5. Исследуется возможность построения прямой, проходящей через эту точку, правее которой должна располагаться  $W^*(j\omega)$ . Делается вывод об абсолютной устойчивости нелинейной системы.

**ПРИМЕР 9.5**

Определить, является ли система (см. рис. 9.3, б) абсолютно устойчивой, если нелинейный элемент представляет собой усилитель с ограничением (рис. 9.6). Уровень ограничения  $C = 0,2$ ; передаточная функция линейной части следующая:

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{6}{(2p+1)(p^2+2p+1)}.$$

Как видим, нелинейная характеристика однозначная и удовлетворяет условию (9.27). Ее можно ограничить прямой  $k\Delta$ , где  $k = 0,2$ .

В соответствии с процедурой проверки устойчивости запишем характеристическое уравнение линейной части системы

$$A(p) = (2p+1)(p^2+2p+1) = 2p^3 + 5p^2 + 4p + 1 = 0.$$

Очевидно, что сомножители  $A(p)$  имеют корни с отрицательной вещественной частью, поэтому определим выражение для ее частотной характеристики:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{6(-5\omega^2+1) - j6\omega(4-2\omega^2)}{(-5\omega^2+1)^2 + \omega^2(4-2\omega^2)^2}.$$

Запишем теперь выражение для вещественной и мнимой частей видоизмененной частотной характеристики:

$$\begin{cases} R^*(\omega) = \operatorname{Re} W_{\text{л}}^*(j\omega) = \frac{6(-5\omega^2+1)}{(-5\omega^2+1)^2 + \omega^2(4-2\omega^2)^2}, \\ I^*(\omega) = \operatorname{Im} W_{\text{л}}^*(j\omega) = \frac{-6\omega^2(4-2\omega^2)}{(-5\omega^2+1)^2 + \omega^2(4-2\omega^2)^2}. \end{cases}$$

Значения  $R^*(\omega)$  и  $I^*(\omega)$  для некоторых  $\omega$  представлены в таблице.

$\omega$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	...	$\sqrt{2}$	...	$\infty$
$R^*(\omega)$	6	...	0	...	-0,67	...	0
$I^*(\omega)$	0	...	-3,73	...	0	...	0

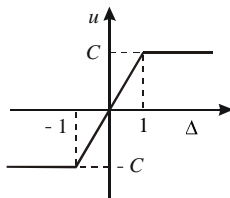


Рис. 9.6. Статическая нелинейная характеристика к примеру 9.5

На рис. 9.7 приведена видоизмененная частотная характеристика, где отмечена точка  $(-1/k, j \cdot 0) = (-5, j \cdot 0)$ . Очевидно, что через эту точку можно провести прямую (и не одну) так, что левее нее будет располагаться характеристика  $W^*(j\omega)$ .

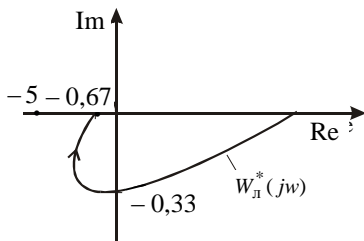


Рис. 9.7. Видоизмененная частотная характеристика к примеру 9.5

Таким образом, система с нелинейной характеристикой (рис. 9.7) будет абсолютно устойчива.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрели способы анализа устойчивости нелинейных систем. Однако ни один из них не является универсальным, что обусловлено как сложностью описания самих систем, так и рассмотренными теоремами, с помощью которых можно определить лишь достаточные условия устойчивости.

Исследование нелинейной системы по линейному приближению позволяет оценить устойчивость лишь для малой окрестности точки равновесия и только в случае, когда линеаризованная система не находится на границе устойчивости. Выбор подходящей функции Ляпунова является своего рода искусством и зависит от вида описания системы и опыта исследователя [4]. Частотный метод В.М. Попова применим только для комбинированных систем с однозначной статической нелинейной характеристикой.

Следует заметить, что в настоящее время задача аналитической оценки устойчивости потеряла прежнюю актуальность, поскольку разработанное программное обеспечение дает возможность с достаточной



точностью вычислять решения дифференциальных уравнений (например, с помощью интегрированной среды MATLAB). Использование метода компьютерного моделирования посредством программы SIMULINK позволяет напрямую оценить свойства системы.

Тем не менее при проектировании нелинейных систем с заданными свойствами, т. е. для решения задачи синтеза, аппарат второго метода Ляпунова дает важные аналитические конструкции.

## ЗАДАЧИ

**9.1.** Определить устойчивость по линейному приближению относительно всех точек равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1 x_2. \end{cases}$$

**9.2.** Определить устойчивость по линейному приближению относительно всех точек равновесия системы

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x - x^2 = 0.$$

**9.3.** Определить устойчивость системы по линейному приближению относительно одного из состояний равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1 x_2. \end{cases}$$

**9.4.** Определить устойчивость системы по линейному приближению относительно одного из состояний равновесия при  $u = 1$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u. \end{cases}$$

**9.5.** Определить устойчивость по линейному приближению относительно всех точек равновесия системы при  $u = 2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 - x_2 + u. \end{cases}$$

**9.6.** Определить устойчивость системы, уравнения состояния которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 8x_2, \end{cases}$$

с помощью следующей функции Ляпунова:  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ .

**9.7.** Определить устойчивость системы, уравнения состояния которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 7x_2, \end{cases}$$

с помощью следующей функции Ляпунова:  $V(x) = x^T Bx$ , где  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

**9.8.** Определить устойчивость замкнутой системы вторым методом Ляпунова, если известна передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{12}{(p-1)(5p+1)}.$$

**9.9.** С помощью функции Ляпунова  $V(x) = 5x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$  исследовать устойчивость системы, структурная схема которой приведена на рис. 9.8.

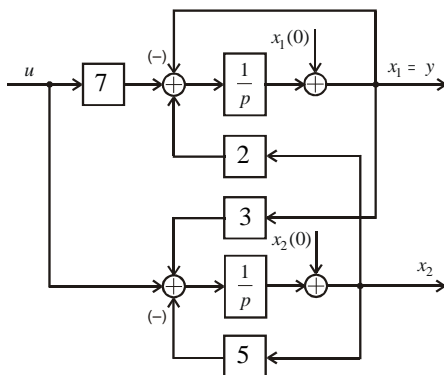


Рис. 9.8. Структурная схема системы к задаче 9.9

**9.10.** Решая матричное уравнение Ляпунова, проверить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

**9.11.** Решая матричное уравнение Ляпунова, проверить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 7x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 10x_2. \end{cases}$$

**9.12.** Вторым методом Ляпунова проверить устойчивость системы (рис. 9.9), если  $W_1(p) = \frac{1}{p+2}$  и  $W_2(p) = \frac{5}{3p+1}$ .

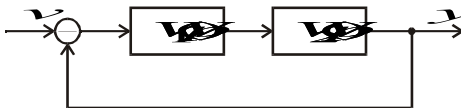


Рис. 9.9. Структурная схема замкнутой системы к задаче 9.12

**9.13.** Вторым методом Ляпунова проверить устойчивость системы (рис. 9.9), если  $W_1(p) = \frac{1}{p}$  и  $W_2(p) = \frac{15}{0,5p+1}$ .

**9.14.** Вторым методом Ляпунова определить устойчивость системы, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 5e^{-x_1} - 3x_2. \end{cases}$$

**9.15.** Вторым методом Ляпунова определить устойчивость системы, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -e^{-x_1} + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2^3. \end{cases}$$

### 9.16. С помощью функции Ляпунова

$$V(x) = 0,5 \cdot 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

проверить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1x_2 - x_1^3 - 0,5x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_1x_2 + x_1^2x_2 - 0,5x_1x_2^2. \end{cases}$$

**9.17.** Определить устойчивость системы, структурная схема которой представлена на рис. 9.10.

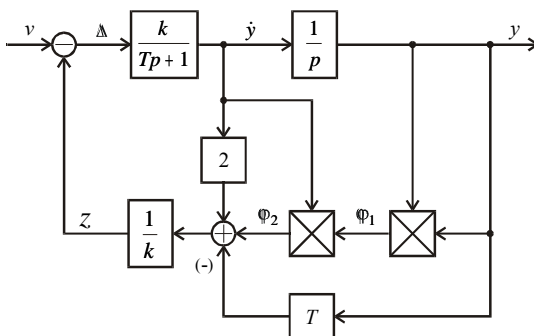


Рис. 9.10. Структурная схема системы к задаче 9.17

**9.18.** Проверить условие абсолютной устойчивости системы (рис. 9.11) с однозначной нелинейной характеристикой  $u = f(\Delta)$ ,  $0 < f(\Delta) < 3\Delta$ , если

$$W_{\pi}(p) = \frac{6}{p^2 + 5p + 1} \cdot \frac{1}{p + 1}.$$

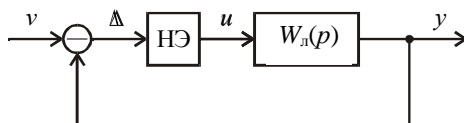


Рис. 9.11. Структурная схема нелинейной системы к задаче 9.18

**9.19.** Проверить условие абсолютной устойчивости системы (рис. 9.12) с однозначной нелинейной характеристикой  $u = f(\Delta)$ ,  $0 < f(\Delta) < 0,5 \Delta$ ,

если  $W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p^3 + p^2 + 3p + 1}$ .

**9.20.** Проверить условие абсолютной устойчивости системы (рис. 9.11), если  $W_{\text{л}}(p) = \frac{10}{(p+5)(p+2)(p+1)}$ , а однозначная нелинейная характеристика при  $C = 5$  имеет вид, показанный на рис. 9.12.

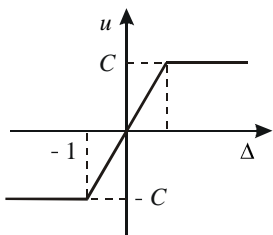


Рис. 9.12. Статическая нелинейная характеристика к задаче 9.20

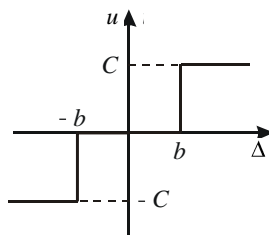


Рис. 9.13. Статическая нелинейная характеристика к задачам 9.21 и 9.22

**9.21.** Проверить условие абсолютной устойчивости системы

(см. рис. 9.11), если  $W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 4}$ , а однозначная нелиней-

ная характеристика при  $C = 10$ ,  $b = 2$  имеет вид, изображенный на рис. 9.13.

**9.22.** Проверить условие абсолютной устойчивости системы

(см. рис. 9.11), если  $W_{\text{л}}(p) = \frac{10(p+1)}{(p+1)(p^2 + 6p + 1)}$ , а однозначная нели-

нейная характеристика при  $C = 2$ ,  $b = 0,5$  имеет вид, изображенный на рис. 9.13.

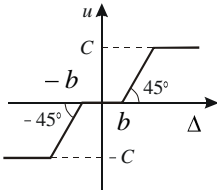


Рис. 9.14. Статическая нелинейная характеристика к задаче 9.23

**9.23.** Проверить условие абсолютной устойчивости системы (см. рис. 9.11), если

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{5}{(p+3)(p^2+p+10)},$$

а однозначная нелинейная характеристика  $C = 3$  имеет вид, показанный на рис. 9.14, где  $C = 3$ ,  $b = 0,5$ .

---

---

## Глава 10

# АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

---

---

**В** главе 5 мы показали, что качество работы линейной системы можно оценить различными способами без непосредственного расчета переходного процесса. Отметим, что задача имеет смысл только для устойчивой системы, и это априори всегда предполагается.

Поскольку характер процессов нелинейной системы, как и ее устойчивость, существенно зависит от значений внешних воздействий и начальных условий, методы линейной теории неприменимы. Трудности анализа и оценивания процессов соответствуют сложности решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Одно время казалось, что возможности второго метода Ляпунова позволят разработать регулярные процедуры оценки частных решений дифференциальных уравнений, т. е. переходных процессов автоматических систем. К сожалению, метод Ляпунова дает слишком завышенные соотношения, которые на практике не применяются.

Таким образом, к настоящему времени не разработано общей теории анализа процессов в нелинейных системах, существуют лишь методики, которые позволяют решать отдельные задачи. В этом разделе мы рассмотрим некоторые из них.

### 10.1. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Метод фазовой плоскости применяется для анализа свойств систем второго порядка и основан на использовании аппарата пространства состояний. Суть метода заключается в отображении частных решений дифференциальных уравнений в совокупность фазовых траекторий.

Обсудим способы построения фазового портрета системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \tilde{f}_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 = \tilde{f}_2(x_1, x_2, u). \end{cases} \quad (10.1)$$

Управляющее воздействие  $u$  входит в правую часть (10.1) как параметр. Отметим, что если оно изменяется, то векторное поле будет управляемым. Здесь полагаем  $u = \text{const}$  и его численное значение учтем в соответствующих функциях, что позволяет модель (10.1) записать в форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (10.2)$$

В принципе, задавая множество наборов значений  $x_1$  и  $x_2$ , можно получить поле векторов скорости (рис. 10.1) и, двигаясь вдоль них, построить фазовую траекторию системы из определенных начальных условий.

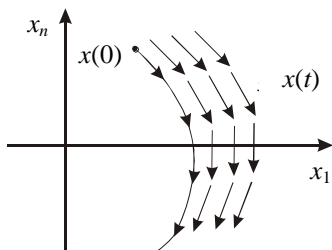


Рис. 10.1. Пример построения фазовой траектории

Таким образом, мы геометрически определили решение дифференциального уравнения (10.1) для конкретных начальных условий. Однако в настоящее время этот способ не находит применения, так как наличие развитых средств вычислительной техники позволяет легко получить требуемую совокупность решений.

Интерес представляют упрощенные аналитические способы построения фазового портрета системы, одним из которых является способ изоклин, когда не требуется информация о значениях вектора скорости.

**Изоклиной** называют линию в пространстве состояний, соединяющую все точки пространства с одинаковым наклоном фазовых траекторий. Выражение для коэффициента наклона траекторий  $k$  имеет вид

$$k = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}, \quad (10.3)$$



откуда чаще всего удается получить явное аналитическое описание семейства изоклин

$$x_2 = \varphi(x_1, k).$$

Задаваясь рядом численных значений  $k$  из диапазона от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим из (10.4) совокупность конкретных изоклин. Следует отметить, что чем больше построено изоклин, тем полнее и точнее будет фазовый портрет, технику построения которого поясним на примере.

### ПРИМЕР 10.1

Построить фазовый портрет системы, поведение которой описывает уравнение

$$\ddot{y} + 0,5\dot{y} + y = 2u,$$

при численном значении управляющего воздействия  $u = 1$ .

Предварительно перейдем к описанию системы в переменных состояния, полагая  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 0,5x_2 + 2. \end{cases}$$

В соответствии с (10.3) определим коэффициент наклона фазовых траекторий:

$$k = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1 - 0,5x_2 + 2}{x_2}$$

и запишем уравнение семейства изоклин

$$x_2 = \frac{2 - x_1}{k + 0,5}.$$

Придавая коэффициенту  $k$  определенные численные значения, получим уравнения конкретных изоклин (табл. 10.1).

Т а б л и ц а 10.1

$k$	0	1	-1	...	$\infty$
$\alpha = \arctg k$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
Изоклина	$4 - 2x_1$	$\frac{4 - 2x_1}{3}$	$-4 + 2x_1$	...	$x_2 = 0$

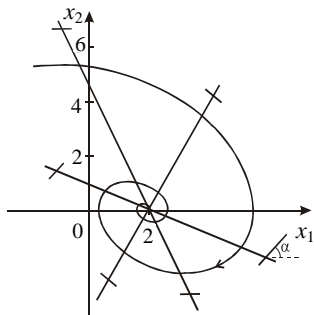


Рис. 10.2. Фазовая траектория к примеру 10.1

Построив на фазовой плоскости каждую изоклину (рис. 10.2), отметим угол  $\alpha$ , под которым ее будут пересекать фазовые траектории системы.

Оценив знаки производных переменных состояния в начальной точке, определим направление движения. С этой целью координаты выбранной точки  $-1,5; +5$  подставим в уравнения состояния системы и получим  $\dot{x}_1 > 0$ ,  $\dot{x}_2 < 0$ . Соответствующая фазовая траектория приведена на рис. 10.2. Как видим, система устойчива и переходные процессы в ней имеют колебательный характер.

Отметим, что для линейных систем изоклины представляют собой прямые, которые пересекаются в одной точке. Для нелинейных систем они могут иметь произвольный характер, причем в этом случае фазовый портрет можно построить, используя соответствующий пакет прикладных программ (например, SIMULINK).

## 10.2. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

### 10.2.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Одним из характерных режимов работы нелинейной системы является автоколебательный режим, когда при отсутствии периодического входного сигнала в системе возникают незатухающие периодические процессы. Подобный режим работы может быть требуемым (например, в различных генераторах колебаний) или же к нему могут сходиться процессы системы.

Одна из задач анализа переходных процессов заключается в исследовании возможности возникновения автоколебаний и определении их параметров (амплитуды и частоты). Для этих целей был разработан регулярный метод, который в русскоязычной литературе получил название **метода гармонического баланса** [6, 35]. Этот метод применяется для анализа систем с одним нелинейным элементом, причем для простоты будем полагать, что входное воздействие отсутствует  $v = 0$ ,

а все линейные звенья объединены в одно с передаточной функцией  $W_n(p)$ . Структурная схема рассматриваемых систем изображена на рис. 10.3.

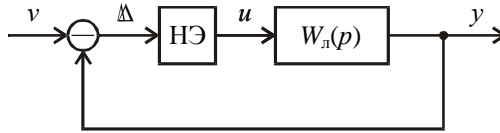


Рис. 10.3. Структурная схема исследуемой системы

Метод гармонического баланса пригоден для исследования автоколебательных систем практически любого порядка, но требует обеспечения условий хорошей фильтрации возникающих на выходе нелинейного звена гармонических составляющих сигнала (выше первой гармоники).

В основе расчетных соотношений метода гармонического баланса лежит способ гармонической линеаризации нелинейного элемента [6, 19], который мы далее и рассмотрим.

### 10.2.2. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Под **линеаризацией** понимают приближенную замену нелинейной функции линейной таким образом, чтобы по какому-то выбранному показателю обе эти функции совпадали.

В способе гармонической линеаризации нелинейный элемент (рис. 10.4) заменяется квазилинейным звеном, параметры которого определяются при синусоидальном входном сигнале



Рис. 10.4. Нелинейный элемент

$$\Delta = A \sin(\omega t) \quad (10.4)$$

из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена.

Рассмотрим процедуру линеаризации для нелинейного элемента, уравнение которого примем в виде

$$u = f(\Delta, \dot{\Delta}). \quad (10.5)$$

При поступлении на его вход гармонического сигнала (10.4) на выходе звена в установившемся режиме также будет периодический, но несинусоидальный сигнал

$$u = f(A \sin(\omega t), A \omega \cos(\omega t)) = f(A, \omega t). \quad (10.6)$$

Разложим его в ряд Фурье [40] и получим

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) + c_k \cos(k\omega t), \quad (10.7)$$

где будем полагать  $u_0 = 0$ , что справедливо для симметричной нелинейной характеристики (10.6).

С учетом (10.6) коэффициенты ряда Фурье (10.7) определяются известными соотношениями

$$\begin{cases} b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \\ c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \end{cases}$$

Используем только первые члены ряда разложения в (10.7), пренебрегая высшими гармониками, и получим

$$u \approx b_1 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t). \quad (10.8)$$

Учтем, что  $\Delta = A \sin(\omega t)$ , а  $\dot{\Delta} = A \omega \cos(\omega t)$ , следовательно,

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{\Delta}{A}, \\ \cos(\omega t) = \frac{\dot{\Delta}}{A\omega}. \end{cases} \quad (10.9)$$

После подстановки (10.9) в (10.8) получим выражение для выходного сигнала нелинейного звена

$$u = \frac{b_1}{A} \Delta + \frac{c_1}{A\omega} \dot{\Delta},$$

которое, если принять обозначения

$$\begin{cases} q_1(A, \omega) = \frac{b_1}{A}, \\ q_2(A, \omega) = \frac{c_1}{A}, \end{cases} \quad (10.10)$$

можно записать в виде

$$u = q_1(A, \omega)\Delta + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} \dot{\Delta}. \quad (10.11)$$

Здесь  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

Как видим, уравнение нелинейного звена (10.11) с точностью до высших гармоник является квазилинейным. При постоянных значениях амплитуды входного сигнала  $A$  коэффициенты гармонической линеаризации  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  являются постоянными. Однако различным значениям амплитуды  $A$  соответствуют разные коэффициенты  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$ . В этом заключается отличие гармонической линеаризации от обычной (см. разд. 8).

Таким образом, вместо нелинейного элемента с характеристикой (10.5) можно рассматривать эквивалентное линейное звено, поведение которого описывается уравнением (10.11). Оно может быть представлено в операторной форме

$$u = \left[ q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \right] \Delta. \quad (10.12)$$

Для гармонически линеаризованного нелинейного элемента можно записать передаточную функцию

$$W_{\text{НЭ}}(p, A, \omega) = \frac{u}{\Delta} = q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega} p \quad (10.13)$$

и получить из нее выражение для частотной характеристики

$$W_{\text{НЭ}}(A, j\omega) = q_1(A, \omega) + jq_2(A, \omega). \quad (10.14)$$

В случае статической нелинейной характеристики вместо (10.5) имеем

$$u = f(\Delta)$$

и уравнение (10.12) принимает вид [6]

$$u = \left[ q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega} p \right] \Delta, \quad (10.15)$$

где коэффициенты гармонической линейризации  $q_1(A)$  и  $q_2(A)$  зависят только от амплитуды. При этом получим передаточную функцию

$$W_{\text{НЭ}}(p, A, \omega) = q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega} p \quad (10.16)$$

и частотную характеристику

$$W_{\text{НЭ}}(A, j\omega) = q_1(A) + jq_2(A) \quad (10.17)$$

статического нелинейного звена.

Для однозначной статической нелинейной характеристики коэффициент  $q_2(A) = 0$ , и вместо (10.14) получим

$$W_{\text{НЭ}}(A, j\omega) = q_1(A). \quad (10.18)$$

Коэффициенты гармонической линейризации типовых статических нелинейных звеньев приводятся в литературе (например, в [6, 40]).

### ПРИМЕР 10.2

Определить эквивалентную передаточную функцию нелинейного звена, которое представляет собой идеальное реле (рис. 10.5).

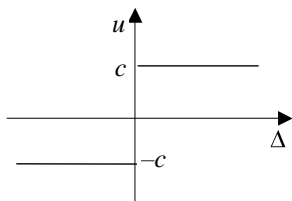


Рис. 10.5. Статическая характеристика идеального реле

Поскольку идеальное реле имеет однозначную статическую характеристику, выражение для его передаточной функции (10.16) имеет вид

$$W_{\text{НЭ}}(A, j\omega) = q_1(A),$$

где коэффициент  $q_1(A)$  определяется как

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A, \omega t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4c}{\pi A}.$$

Далее, учитывая полученные выражения для передаточных функций гармонически линеаризованных нелинейных элементов (10.14), (10.17), рассмотрим соотношения метода гармонического баланса.

### 10.2.3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Если в системе, изображенной на рис. 10.3, гармонически линеаризовать нелинейный элемент, заменив его эквивалентной передаточной функцией  $W_{НЭ}(p, A, \omega)$ , то она становится линейной (рис. 10.6). Следовательно, в этом случае для анализа свойств системы можно применять методы линейной теории управления.

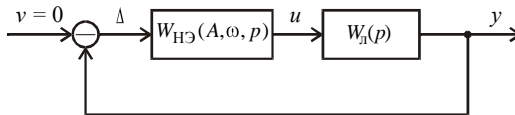


Рис. 10.6. Структурная схема гармонически линеаризованной системы

Как известно, в линейной системе (при отсутствии синусоидального сигнала на входе) незатухающие колебания будут возникать лишь в том случае, когда она находится на границе устойчивости. Таким образом, для определения автоколебаний в исходной системе (см. рис. 10.3) необходимо рассмотреть условие границы устойчивости линеаризованной системы. В соответствии с критерием Найквиста в этой ситуации амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы должна проходить через точку  $-1, j \cdot 0$ , т. е.

$$W_p(A, j\omega) = -1.$$

Учитывая, что  $W_p(A, j\omega) = W_{НЭ}(A, j\omega)W_l(j\omega)$ , запишем условие границы устойчивости в виде

$$W_{НЭ}(A, j\omega)W_l(j\omega) = -1. \quad (10.19)$$

Это уравнение и представляет собой основное уравнение метода гармонического баланса, из которого можно определить параметры автоколебаний. Если (10.19) не имеет положительных вещественных решений относительно  $A$  и  $\omega$ , то автоколебательный режим в нелинейной системе не возникает.

Для решения основного уравнения метода гармонического баланса были предложены различные способы, которые мы далее последовательно и рассмотрим.

### 10.2.4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В этом случае для определения границы устойчивости линеаризованной системы удобнее воспользоваться критерием Михайлова. С этой целью решим характеристическое уравнение системы (см. рис. 10.6)

$$F(p, A, \omega) = 1 + W_{\text{НЭ}}(p, A, \omega)W_{\text{Л}}(p) = 0, \quad (10.20)$$

заменяя в котором  $p$  на  $j\omega$ , получим условие границы устойчивости согласно критерию Михайлова

$$F(A, j\omega) = 1 + W_{\text{НЭ}}(A, j\omega)W_{\text{Л}}(j\omega) = 0. \quad (10.21)$$

Заметим, что (10.21) есть преобразованная форма записи основного уравнения метода гармонического баланса (10.19).

Выделяя вещественную и мнимую части  $F(A, j\omega)$ , получим соотношения

$$\begin{cases} \operatorname{Re} F(A, j\omega) = 0, \\ \operatorname{Im} F(A, j\omega) = 0, \end{cases} \quad (10.22)$$

которые позволяют аналитически вычислить параметры автоколебаний  $A$  и  $\omega$ .

#### ПРИМЕР 10.3

Определить параметры автоколебаний в системе (см. рис. 10.3), если нелинейный элемент представляет собой идеальное реле (см. рис. 10.5) с уровнем ограничения  $c = \pi$ , а линейную часть описывает передаточная

$$\text{функция } W_{\text{Л}}(p) = \frac{2}{p(p^2 + p + 1)}.$$



Запишем передаточную функцию гармонически линеаризованного идеального реле

$$W_{\text{НЭ}}(A, j\omega) = \frac{4c}{\pi A} = \frac{4}{A},$$

а затем характеристическое уравнение (10.18)

$$1 + \frac{4}{A} \frac{2}{p(p^2 + p + 1)} = 0,$$

которое преобразуем к виду

$$A(p^3 + p^2 + p) + 8 = 0.$$

Заменив здесь  $p$  на  $j\omega$ , получим

$$A(-j\omega^3 - \omega^2 + j\omega) + 8 = 0.$$

В результате расчетные соотношения имеют вид

$$\begin{cases} -A\omega^2 + 8 = 0, \\ \omega - \omega^3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в нелинейной системе будут возникать периодические движения со следующими параметрами:  $\omega = 1$  и  $A = 8$ .

### 10.2.5. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В некоторых случаях возникает необходимость оценить влияние одного из параметров системы (обозначим его  $\alpha$ ) на автоколебания. При этом уравнение (10.21) принимает вид

$$F(A, j\omega, \alpha) = 1 + W_{\text{НЭ}}(A, j\omega)W_{\text{л}}(j\omega, \alpha) = 0.$$

Следовательно, соотношения (10.22), кроме параметров  $A$  и  $\omega$ , содержат  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} F(A, \omega, \alpha) = 0, \\ \operatorname{Im} F(A, \omega, \alpha) = 0. \end{cases} \quad (10.23)$$

Решив уравнения (10.23) относительно  $A$  и  $\omega$ , получим параметрические зависимости

$$\begin{cases} A = A(\alpha), \\ \omega = \omega(\alpha) \end{cases} \quad (10.24)$$

и построим соответствующие графики (рис. 10.7).

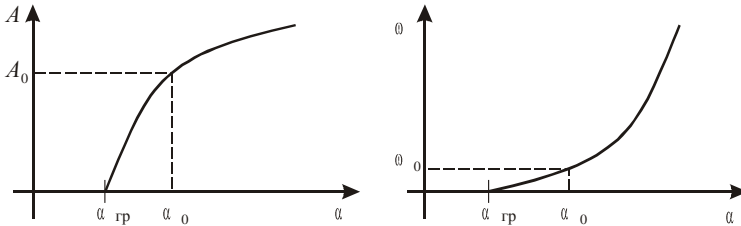


Рис. 10.7. Пример влияния параметра  $\alpha$  на периодические процессы

По этим графикам можно выбрать значение  $\alpha_0$ , при котором в системе будут возникать периодические процессы с определенной амплитудой и частотой ( $A_0$  и  $\omega_0$ ).

### 10.2.6. СПОСОБ ГОЛЬДФАРБА

Решение основного уравнения метода гармонического баланса (10.19) относительно амплитуды и частоты автоколебаний можно получить графически.

В способе Гольдфарба [6, 19] предлагается решить основное уравнение относительно частотной характеристики линейной части системы следующим образом:

$$W_{л}(j\omega) = -\frac{1}{W_{н\bar{\Delta}}(A, j\omega)}. \quad (10.25)$$

Затем на комплексной плоскости строятся амплитудно-фазовая характеристика  $W_{л}(j\omega)$  и характеристика, соответствующая нелинейному элементу, т. е.

$$-\frac{1}{W_{НЭ}(A, j\omega)}. \quad (10.26)$$

Если эти две характеристики не пересекаются, то периодических процессов в нелинейной системе не возникает.

При наличии пересечений частота автоколебаний определяется по частотной характеристике линейной части системы  $W_{л}(j\omega)$ , а амплитуда – по характеристике нелинейного элемента в точке пересечения.

Поскольку в общем случае точек пересечения  $W_{л}(j\omega)$  и характеристики нелинейного элемента (10.26) может быть несколько, в системе могут возникать соответствующие им периодические процессы различной амплитуды и частоты. Причем часть из них будут устойчивыми, а часть – неустойчивыми.

Устойчивость найденного колебательного режима позволяет оценить следующее *правило* (оно не является строго обоснованным, но зачастую оказывается полезным). Если при движении по обратной частотной характеристике нелинейного элемента в сторону увеличения амплитуды происходит пересечение амплитудно-фазовой характеристики линейной части «изнутри наружу», то этой точке пересечения соответствуют устойчивые колебания (автоколебания). В противном случае колебания будут неустойчивыми.

На рис. 10.8 характеристики  $W_{л}(j\omega)$  и  $-W_{НЭ}(A, j\omega)^{-1}$  пересекаются в двух точках. Это означает, что в системе могут возникать два вида колебаний.

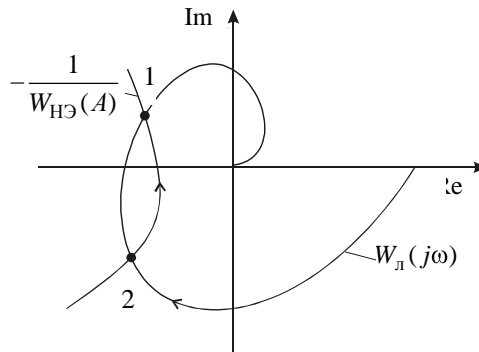


Рис. 10.8. Иллюстрация способа Гольдфарба

Причем первой точке пересечения соответствуют устойчивые колебания (автоколебания) с амплитудой  $A_1$  и частотой  $\omega_1$ , а второй точке — неустойчивые.

#### ПРИМЕР 10.4

Определить параметры колебаний и проверить их устойчивость для системы, изображенной на рис. 10.6. Здесь нелинейный элемент представляет собой идеальное реле (см. рис. 10.5) с уровнем ограничения  $c = \pi$ , а передаточная функция линейной части следующая:

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p(p^2 + p + 1)}.$$

Получим выражение для амплитудно-частотной характеристики (рис. 10.9) в виде

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{2}{j\omega(-\omega^2 + j\omega + 1)}$$

или

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{-2\omega^2}{\omega^4 + \omega^2(1 - \omega^2)^2} + \frac{-j2\omega(1 - \omega^2)}{\omega^4 + \omega^2(1 - \omega^2)^2}.$$

Запишем выражение для частотной характеристики нелинейного элемента

$$W_{\text{НЭ}}(A, \omega) = q_1(A) = \frac{4c}{\pi A} = \frac{4}{A},$$

а затем построим годограф (рис. 10.9)

$$-\frac{1}{W_{\text{НЭ}}(A)} = -\frac{A}{4}.$$

Как видим, эти характеристики пересекаются в одной точке, которая соответствует автоколебаниям. Для определения их параметров найдем координаты точки пересечения, для чего приравняем нулю мнимую часть  $W_{\text{л}}(j\omega)$ :

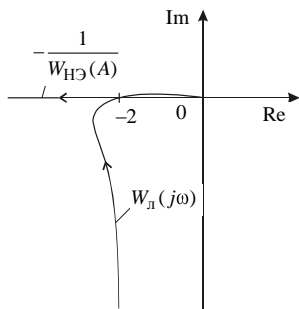


Рис. 10.9. Расположение характеристик (10.23) для примера 10.4

$$\operatorname{Im} W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{-2\omega(1-\omega^2)}{\omega^4 + \omega^2(1-\omega^2)^2} = 0.$$

Отсюда следует, что  $\omega_a = 1$ .

При найденном значении частоты получим

$$\operatorname{Re} W_{\text{л}}(j\omega_a) = -2.$$

Из условия

$$\operatorname{Re} W_{\text{л}}(j\omega_a) = -2 = -\frac{A}{4}$$

определим амплитуду автоколебаний:  $A_a = 8$ .

### 10.2.7. СПОСОБ КОЧЕНБУРГЕРА

Способ Коченбургера представляет собой второй вариант графического решения основного уравнения метода гармонического баланса (10.19). В этом случае его предлагается решить относительно характеристики нелинейного элемента системы следующим образом:

$$W_{\text{НЭ}}(A, j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{л}}(j\omega)}. \quad (10.27)$$

Как и в способе Гольдфарба, точки пересечения двух характеристик согласно (10.27) свидетельствуют о наличии в системе колебательного режима. Причем частота колебаний определяется по обратной частотной характеристике линейной части системы  $-W_{\text{л}}^{-1}(A, j\omega)$ , а амплитуда – по характеристике нелинейного элемента  $W_{\text{НЭ}}(j\omega)$  в точке пересечения (рис. 10.10).

Процедура определения автоколебаний аналогична способу Гольдфарба, однако *правило* формулируется следующим образом. Если при движении по характе-

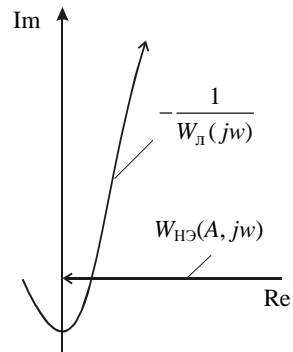


Рис. 10.10. Определение автоколебаний способом Коченбургера для примера 10.5

тике нелинейного элемента в сторону увеличения амплитуды происходит пересечение обратной частотной характеристики линейной части «снаружи внутрь», то этой точке пересечения соответствуют автоколебания. В противном случае колебания будут неустойчивыми.

### ПРИМЕР 10.5

Определить параметры колебаний методом Коченбургера и проверить их устойчивость для системы, показанной на рис. 10.6. Здесь нелинейный элемент представляет собой идеальное реле (см. рис. 10.5) с уровнем ограничения  $c = \pi$ , а передаточная функция линейной части следующая:

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{12}{(5p+1)(3p^2+2p+1)}.$$

Определим необходимую характеристику реле (см. пример 10.4)

$$W_{\text{НЭ}}(A, \omega) = W_{\text{НЭ}}(A) = \frac{4}{A}$$

и построим ее на плоскости (рис. 10.11). Запишем выражение для обратной частотной характеристики линейной части

$$-\frac{1}{W_{\text{л}}(j\omega)} = \frac{13\omega^2 - 1}{12} + j \frac{15\omega^3 - 7\omega}{12}$$

и найдем несколько ее значений (табл. 10.2).

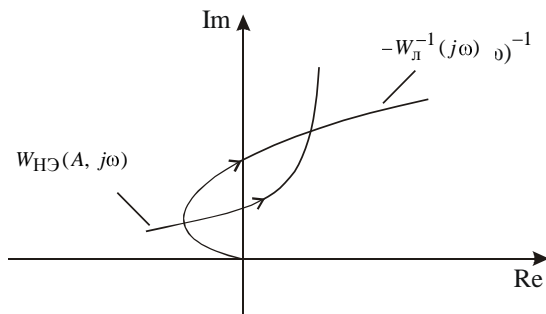


Рис. 10.11. Иллюстрация способа Коченбургера

Т а б л и ц а 10.2

$\omega$	0	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\sqrt{\frac{7}{15}}$	1	...	$\infty$
$\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{W_{\text{Л}}(j\omega)}\right)$	-0,083	0	5,983	1	...	$\infty$
$\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{W_{\text{Л}}(j\omega)}\right)$	0	-0,135	0	0,667	...	$\infty$

Соответствующий график построен на рис. 10.11, где  $4/A = 5,983$ . Следовательно, параметры автоколебаний:  $\omega_a = \sqrt{7/15}$ ,  $A_a = 0,669$ .

### 10.2.8. КОРРЕКЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В некоторых случаях автоколебательный режим является желаемым режимом работы нелинейной системы, поэтому он должен иметь определенные амплитуду и частоту. Если параметры автоколебаний отличаются от требуемых, то возникает необходимость в их коррекции. С этой целью можно воспользоваться следующими рекомендациями.

1. Если можно изменить значения коэффициентов линейной части, следует попытаться подобрать их с учетом заданных параметров автоколебаний. Выбор коэффициентов линейной части осуществляется так, как описано в подразд. 10.2.5.
2. Если параметры линейной части нельзя изменить, то необходимо ее скорректировать. В этом случае на входе линейной части устанавливают дополнительное звено (корректор), которое рассчитывают любым известным в линейной теории методом синтеза.
3. При невозможности изменить линейную часть системы можно попытаться скорректировать нелинейный элемент.

### 10.2.9. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Точность метода гармонического баланса зависит от точности замены нелинейного элемента эквивалентным линейным звеном, полученным в результате гармонической линеаризации. Отсюда следуют условия применимости метода гармонического баланса.

1. Линейная часть системы должна быть низкочастотным фильтром, т. е. отфильтровывать возникающие на выходе нелинейного элемента все гармонические составляющие сигнала, кроме первой.

Для большинства систем, у которых степень полинома числителя передаточной функции меньше степени полинома ее знаменателя, это условие выполняется.

Кроме требования фильтрации, предъявляемого к линейной части, отметим случаи, когда в системе не будут возникать автоколебания.

2. При наличии однозначной статической нелинейной характеристики и передаточной функции линейной части, у которой в числителе находится только коэффициент усиления (т. е.  $W_{\text{л}}(p) = k/A(p)$ ), автоколебания в системе могут возникать только тогда, когда степень характеристического полинома  $n \geq 3$ .

3. В случае неоднозначной статической нелинейной характеристики и  $W_{\text{л}}(p) = k/A(p)$  в системе может возникнуть автоколебательный режим, если  $n \geq 2$ .

### 10.3. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Этот метод обосновывает возможность пренебрежения малыми параметрами, которые присутствуют в математической модели и обычно не учитываются при проектировании реальной системы управления. Следует заметить, что подобное пренебрежение допустимо, если при этом не изменяются качественные свойства системы, а количественно они изменяются несущественно.

Рассмотрим суть метода малого параметра для системы, поведение которой описывают уравнения состояния [8]

$$\dot{x} = f(x) + \mu \varphi(x), \quad x \in R^n. \quad (10.28)$$

Здесь  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  – непрерывные дифференцируемые функции с ограниченными производными,  $f(0) = 0$  и  $\varphi(0) = 0$ , а нормы вектор-функций соизмеримы,  $\|f(x)\| \sim \|\varphi(x)\|$ ;  $\mu$  – малый параметр, причем о его малости можно говорить, когда  $\mu \approx 0,1 \|f(x)\|$ .

Наряду с исходной системой будем рассматривать **вырожденную**, которая получается из (10.26) при  $\mu = 0$ :

$$\dot{x} = f(x). \quad (10.29)$$



На вопрос о том, насколько процессы в системе (10.28) близки к процессам (10.29), отвечает следующее утверждение.

**Теорема.** *Если вырожденная система (10.29) экспоненциально устойчива, то существует такое достаточно малое значение  $\mu$ , при котором исходная система (10.26) также экспоненциально устойчива.*

Для доказательства используем второй метод Ляпунова. Поскольку вырожденная система экспоненциально устойчива, для нее существует такая функция Ляпунова  $V(x)$ , что ее полная производная вдоль траекторий движения (10.29) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x) \leq -c \|x\|^2, \quad c > 0. \quad (10.30)$$

Используем эту же функцию  $V(x)$  для анализа устойчивости исходной системы. Ее полная производная в силу (10.26) имеет вид

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x) + \mu \frac{\partial V}{\partial x^T} \varphi(x). \quad (10.31)$$

С учетом (10.30) вместо (10.29) получим неравенство

$$\dot{V}(x) \leq -c \|x\|^2 + \mu \frac{\partial V}{\partial x^T} \varphi(x). \quad (10.32)$$

Поскольку произведение  $\frac{\partial V}{\partial x^T} \varphi(x)$  также можно ограничить сверху квадратом нормы, при достаточно малом значении  $\mu$  вторая составляющая правой части (10.32) будет меньше по модулю, чем первая. При этом значение  $\dot{V}(x)$  будет не просто меньше нуля, а меньше некоторой квадратичной оценки. Следовательно, система (10.28) будет экспоненциально устойчива.

К сожалению, конкретное численное значение  $\mu$ , начиная с которого будет выполняться условие экспоненциальной устойчивости исходной системы, оценить довольно трудно. Применяемый с этой целью второй метод Ляпунова дает явно заниженные значения. В малой окрестности точки равновесия имеет смысл линеаризовать систему (10.28) и найти граничное значение параметра  $\mu$  с помощью любого критерия устойчивости.

Отметим, что теорема позволяет упростить исследование устойчивости сложных нелинейных систем, так как достаточно проверить устойчивость более простой вырожденной системы.

## 10.4. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

Метод разделения движений также выражает идею малого параметра, но только по отношению к коэффициентам, определяющим инерционность отдельных элементов системы. В реальных ситуациях полное движение можно представить композицией процессов, протекающих с различными скоростями. При этом обычно пренебрегают быстрыми составляющими процесса, порожденными малыми инерционностями, что не всегда допустимо, так как может привести к ошибочным выводам относительно качественных свойств системы, в частности ее устойчивости. Метод разделения движений позволяет ответить на вопрос: «При каких условиях можно пренебречь малыми инерционностями?».

Суть метода заключается в представлении общей модели системы с малыми параметрами в виде совокупности двух подсистем, каждая из которых соответствует своему темпу процессов. В результате упрощается процедура ее анализа и синтеза: вместо сложной системы высокого порядка можно рассматривать две относительно простые подсистемы меньшего порядка.

### 10.4.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ

Математическая модель системы с разнотемповыми процессами представляет собой систему дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных [7, 8, 10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), & x \in R^n, \\ \mu \dot{y} = \varphi(x, y), & y \in R^m, \end{cases} \quad (10.33)$$

где функции  $f(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$  соизмеримы по норме в рабочей области пространства состояний.

Обсудим некоторые свойства этой системы, фазовый портрет которой изображен на рис. 10.12.

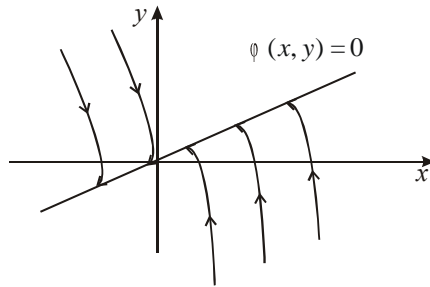


Рис. 10.12. Пример фазового портрета системы с разнотемповыми процессами

Как видим, процессы имеют две фазы движения: из произвольных начальных условий к поверхности  $\varphi(x, y) = 0$  и вдоль нее. Выясним, как соотносятся при этом векторы скорости  $\dot{y}$  и  $\dot{x}$  [8].

1. Во всем пространстве, кроме окрестности поверхности  $\varphi(x, y) = 0$ , вектор скорости ориентирован почти параллельно координате  $y$ . Это означает, что скорость изменения переменных  $y$  много выше, чем  $x$ . Они связаны следующим приближенным соотношением:

$$\|\dot{y}\| \approx \mu^{-1} \|\dot{x}\| \quad \forall x, y: \varphi \neq 0.$$

2. Если изображающая точка системы движется вдоль поверхности  $\varphi(x, y) = 0$ , то скорости изменения переменных будут соизмеримы. В самом деле, поскольку в этом случае справедливо условие

$$\varphi(x(t), y(t)) \equiv 0,$$

полная производная функции  $\varphi(\cdot)$  по времени будет равна нулю, т. е.

$$\dot{\varphi}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^T} \dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^T} \dot{y} = 0.$$

Векторы  $\dot{y}$  и  $\dot{x}$  связаны конечным соотношением, что и означает их соизмеримость.

Таким образом, при движении из произвольных начальных состояний вначале процесс развивается быстро в силу большей скорости

изменения переменной  $y$ . При подходе к  $\varphi(x, y) = 0$  модуль вектора  $\dot{y}$  уменьшается, а на поверхности  $\dot{y}$  и  $\dot{x}$  становятся соизмеримыми, и вдоль нее изображающая точка движется с «нормальной» скоростью.

Интуитивно понятно, что пренебречь быстрыми движениями можно в случае, когда процессы сходятся к поверхности  $\varphi(x, y) = 0$  за существенно меньшее время, чем полная длительность процессов системы. Конкретные рекомендации на этот счет и дает метод разделения движений.

### 10.4.2. ВЫДЕЛЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВИЖЕНИЯ

Для исследования свойств необходимо научиться выделять отдельные составляющие движения: быструю и медленную.

Получим сначала **подсистему медленных движений**. С этой целью будем рассматривать асимптотику системы (10.33), полагая в ней  $\varphi = 0$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y_0), \\ 0 = \varphi(x, y_0), \end{cases} \quad (10.34)$$

где через  $y_0$  обозначены значения  $y$ , соответствующие поверхности  $\varphi(\cdot) = 0$ .

Если теперь из последнего уравнения (10.34) найти  $y_0$  как функцию  $y_0 = \psi(x)$  и подставить в первое, то получим описание независимой подсистемы медленных движений в виде дифференциального уравнения состояния  $n$ -го порядка

$$\dot{x} = f(x, \psi(x)) = f_0(x). \quad (10.35)$$

Для выделения **подсистемы быстрых движений** удобно ввести масштаб времени

$$\tau = \mu^{-1}t,$$

что позволяет «растянуть» процессы и исследовать быструю составляющую.

Поскольку  $t = \mu\tau$ , описание исходной системы (10.33) в новом времени принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\mu\tau} = f(x, y), \\ \mu \frac{dy}{d\mu\tau} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

или окончательно

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mu f(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (10.36)$$

Рассмотрим теперь асимптотику системы (10.34), полагая в ней  $\mu = 0$ . При этом модель быстрых процессов в новом времени  $\tau$  представляет собой следующее дифференциальное уравнение состояния  $m$ -го порядка:

$$\begin{cases} x = \text{const}, \\ \frac{dy}{d\tau} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (10.37)$$

Возвращаясь к обычному времени  $t$ , получим описание подсистемы быстрых движений в виде

$$\begin{cases} x = \text{const}, \\ \mu \dot{y} = \varphi(x, y). \end{cases} \quad (10.38)$$

Отметим, что системы (10.35) и (10.38) независимы и описывают две составляющие общего процесса исходной системы, причем сумма порядков подсистем медленных и быстрых движений равна порядку полной системы (10.31). Степень этого разделения зависит от численного значения  $\mu$ .

**ПРИМЕР 10.6**

Разделить движения в системе, поведение которой описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_1x_2 + x_2 - 2x_3, \\ \mu\dot{x}_3 = -5x_1 - x_2 + -2x_1x_2 - x_3 + 3u. \end{cases}$$

Полагая  $\mu = 0$ , получим вырожденную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_1x_2 + x_2 - 2x_3, \\ 0 = -5x_1 - x_2 + -2x_1x_2 - x_3 + 3u. \end{cases}$$

Выразим из последнего уравнения переменную  $x_3$  в виде

$$x_3 = -5x_1 - x_2 + -2x_1x_2 + 3u$$

и подставим в два оставшихся. В результате получим уравнения подсистемы медленных движений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -11x_1 - x_2 + 6u. \end{cases}$$

Введя масштаб времени  $\tau = \mu^{-1}t$ , запишем исходные уравнения системы в новом времени:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \mu x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \mu (-x_1 + 4x_1x_2 + x_2 - 2x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -5x_1 - x_2 + -2x_1x_2 - x_3 + 3u. \end{cases}$$

Снова полагаем  $\mu = 0$  и получим подсистему быстрых движений в новом времени

$$\begin{cases} x_1 = \text{const}, \\ x_2 = \text{const}, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = -x_3 + 3u + \text{const}, \end{cases}$$

а затем в нормальном времени:

$$\begin{cases} x_1 = \text{const}, \\ x_2 = \text{const}, \\ \mu \dot{x}_3 = -x_3 + 3u + \text{const}. \end{cases}$$

Отметим, что вместо нелинейной системы третьего порядка получили две независимые линейные подсистемы второго и первого порядков.

### 10.4.3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

Полученные в результате рассмотренной процедуры разделения независимые подсистемы быстрых и медленных движений можно исследовать отдельно. Вывод относительно свойств исходной системы позволяют сформулировать теоремы, которые мы далее приведем без доказательства [7, 10] и в упрощенном виде.

**1. Теорема 1.** *Если подсистема быстрых движений (10.38) экспоненциально устойчива, то для любого как угодно малого момента времени  $t_0 > 0$  найдется такое достаточно малое значение параметра  $\mu$ , что траектория движения исходной системы (10.33) будет находиться к моменту времени  $t_0$  в какой угодно малой окрестности поверхности  $\varphi(x, y) = 0$ .*

Доказательство теоремы основано на использовании второго метода Ляпунова. Поскольку подсистема быстрых движений (10.38) экспоненциально устойчива, существующая для нее функция Ляпунова используется при оценке устойчивости полной системы (10.31) [8].

Теорема 1 технически означает, что при экспоненциальной устойчивости подсистемы быстрых движений поведение исходной системы будет близко к поведению медленных движений, т. е. процессы системы (10.33) можно с достаточной точностью оценивать по (10.35).

**2. Теорема 2.** *Если подсистемы быстрых и медленных движений порознь экспоненциально устойчивы, то существует такое достаточно малое значение  $\mu$ , что исходная система (10.33) также экспоненциально устойчива [10].*

Таким образом, эти теоремы устанавливают связь между свойствами полной системы и двумя упрощенными и дают обоснование замене исследования точного решения системы с малым параметром анализом приближенного, а именно решения подсистемы медленных движений.

**ПРИМЕР 10.7**

Используя метод разделения движений, определить устойчивость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 - 2x_2, \\ \mu \dot{x}_2 = 2x_1^2 - 4x_2 + 5u. \end{cases}$$

Полагая  $\varphi = 0$ , получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 - 2x_2, \\ 0 = 2x_1^2 - 4x_2 + 5u, \end{cases}$$

откуда следует

$$x_2 = 0,5x_1^2 - 1,25u.$$

В результате описание подсистемы медленных движений будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2,5u.$$

Получили линейное уравнение первого порядка, которое соответствует устойчивой подсистеме.

Уравнение подсистемы быстрых движений следующее:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \text{const}, \\ \mu \dot{x}_2 = -4x_2 + 5u + \text{const}. \end{cases}$$

Как видим, это линейное уравнение первого порядка, причем подсистема быстрых движений устойчива.

Согласно приведенным теоремам исходная система будет экспоненциально устойчива, а процессы в ней имеют монотонный характер в соответствии с описанием подсистемы медленных движений.

**10.4.4. УСЛОВИЕ РАЗДЕЛИМОСТИ ДВИЖЕНИЙ**

К настоящему времени метод разделения движений получил широкое применение, поскольку позволяет обоснованно представить сложную нелинейную систему в виде совокупности нескольких более простых подсистем. Это существенно упрощает задачу анализа и, что гораздо важнее, синтеза.

Наличие разнотемповых процессов в физической системе обычно обусловлено использованием в ней больших коэффициентов или



звеньев с малой постоянной времени. Однако количественная оценка параметра  $\mu$ , при котором возникают различные по скорости движения, остается «слабым местом» метода.

Наиболее просто можно определить возможность разделения движений в линейной системе, например, по ее корневому портрету. Если на нем можно выделить две группы «разнесенных» корней (рис. 10.13), то в системе будут протекать разнотемповые процессы; причем удаленным корням соответствует быстрая составляющая.

В случае линейной системы с малым параметром

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y, & x \in R^n, \\ \mu \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y, & y \in R^m, \end{cases} \quad (10.39)$$

можно предложить количественную оценку применимости метода. В соответствии с процедурой, рассмотренной в разд. 10.4.2, выделим подсистему медленных движений

$$\dot{x} = \tilde{A}_{11}x, \quad (10.40)$$

которая имеет  $n$  корней:

$$\Lambda_M = p_{1M}, \dots, p_{nM}.$$

Описание быстрой составляющей имеет вид

$$\begin{cases} x = \text{const}, \\ \mu \dot{y} = A_{22}y + A_{21}x \end{cases} \quad (10.41)$$

и содержит  $m$  корней:

$$\Lambda_S = p_{1S}, \dots, p_{mS}.$$

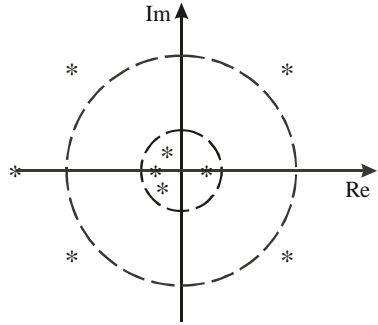


Рис. 10.13. Пример распределения корней в системе с разнотемповыми процессами

При сравнении расположения корней, соответствующих разнотемповым процессам, удобно использовать понятие **среднеквадратичного корня**. Определим среднеквадратичный корень для подсистемы медленных движений (10.40) в виде

$$\Omega_M = \sqrt[n]{(-1)^n p_{1M} \cdots p_{nM}}. \quad (10.42)$$

Для подсистемы быстрых движений (10.41) он находится следующим образом:

$$\Omega_6 = \sqrt[m]{(-1)^m p_{16} \cdots p_{m6}}. \quad (10.43)$$

Мерой разделимости движений может служить эмпирическая оценка

$$D = \frac{\Omega_6}{\Omega_M} \geq 10. \quad (10.44)$$

Отметим, что разделение движений будет тем точнее, чем больше величина  $D$ . Это соответствует большему разнесению групп корней, показанных на рис. 10.13.

Если исследуемая система нелинейная, то проверить условие разделимости можно по корням линеаризованных подсистем быстрых и медленных движений. Однако полученная оценка справедлива лишь в достаточно малой окрестности точки линеаризации. Основным условием применимости метода разделения движений в этой ситуации является физическое наличие в системе малых инерционностей или больших коэффициентов.

#### ПРИМЕР 10.6

Проверить справедливость пренебрежения звеном с малой инерционностью в системе (рис. 10.14), если

$$W_1(p) = \frac{3}{\mu^2 p^2 + \mu p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{p+3}, \quad \text{а } \mu = 0,1.$$

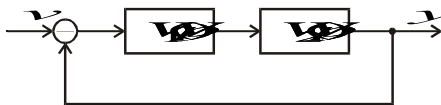


Рис. 10.14. Структурная схема системы к примеру 10.6

Как видим, малым параметром  $\mu$  в системе является постоянная времени колебательного звена. Ее численное значение на порядок меньше остальных коэффициентов, поэтому можно предположить возникновение порожденных  $\mu$  разнотемповых процессов.

Для того чтобы применить метод разделения движений, необходимо привести описание системы к стандартному для него виду. Предварительно введем обозначения:  $x_1 = y$  – выход звена с передаточной функцией  $W_2(p)$ ;  $x_2$  – выходная переменная звена с передаточной функцией  $W_1(p)$ .

С учетом обозначений запишем уравнения системы в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 3x_1 = 2x_2, \\ \mu^2 \ddot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + x_2 = 3v - 3x_1. \end{cases}$$

Введем третью переменную состояния,  $x_3 = \mu \dot{x}_2$ , и получим описание системы в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2, \\ \mu \dot{x}_2 = x_3, \\ \mu \dot{x}_3 = -3x_1 - x_2 - x_3 + 3v. \end{cases}$$

Используя процедуру разделения движений, выделим медленную составляющую

$$\dot{x}_1 = -9x_1 + 6v$$

и соответствующий ей корень

$$p_M = -9.$$

Запишем теперь среднегеометрический корень

$$\Omega_M = |p_M| = 9.$$

Быстрые процессы определяются уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \text{const}, \\ \mu \dot{x}_2 = x_3, \\ \mu \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + 3v + \text{const}, \end{cases}$$

от которых можно перейти к следующему:

$$\mu^2 \ddot{x}_2 + \mu \dot{x}_2 + x_2 = 3v + \text{const}.$$

Отсюда при заданном численном значении  $\mu$  найдем корни подсистемы быстрых движений

$$p_{1,2\delta} = -5 \pm j\sqrt{75}$$

и среднегеометрический корень

$$\Omega_{\delta} = \sqrt{p_{1\delta} p_{2\delta}} = \sqrt{25 + 75} = 10.$$

Определим затем значение меры разделимости движений (10.42)

$$D = \frac{\Omega_{\delta}}{\Omega_{\text{м}}} = \frac{10}{9} \approx 1,1.$$

Таким образом, несмотря на малость постоянной времени  $\mu$ , разнотемповые процессы в системе не возникнут. Следовательно, при заданном численном значении  $\mu$  нельзя пренебрегать соответствующим звеном, необходимо исследовать процессы в полной системе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе представлены методы, которые наиболее часто используются при анализе и проектировании нелинейных систем, и каждый из них имеет свою рациональную область применения.

Так, метод фазовой плоскости на практике используется для исследования процессов в системах второго порядка, причем по характеру фазовой траектории оценивается качество ее работы.

Метод гармонического баланса, основанный на способе гармонической линеаризации, позволяет определить автоколебания в комбинированной системе. Этот метод является приближенным и применяется для систем, у которых линейная часть представляет собой фильтр низких частот.

Наличие в системе больших коэффициентов усиления или звеньев с малой инерционностью может приводить к возникновению в ней разнотемповых процессов. Для анализа их свойств используется метод разделения движений. Следует заметить, что предварительно описание системы необходимо представить в стандартном виде (в переменных состояния) и выделить малый параметр, который должен находиться при части производных переменных состояния.

## З А Д А Ч И

**10.1.** Построить фазовый портрет системы, математическая модель которой имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 2u, \quad u = \text{const} = 1. \end{cases}$$

**10.2.** Построить фазовый портрет системы, поведение которой описывают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u, \quad u = \text{const} = 5. \end{cases}$$

**10.3.** Построить фазовый портрет системы, поведение которой описывают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2. \end{cases}$$

**10.4.** Построить фазовый портрет системы (рис. 10.15), где  $\nu = 0$ , НЭ – идеальное реле с уровнем ограничения

$$c = 2, W_{\text{л}}(p) = \frac{10}{p^2 + 5p + 2}.$$

**10.5.** Построить фазовый портрет системы (рис. 10.15) с заданным нелинейным элементом (рис. 10.16), где  $\nu = 0$ ,  $W_{\text{л}}(p) = \frac{4}{p^2 + p + 7}$ ,  $C = 5$ .

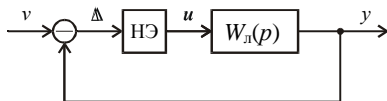


Рис. 10.15. Структурная схема системы

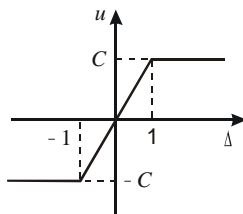
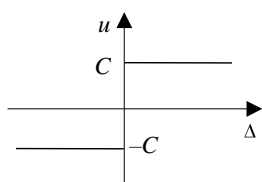


Рис. 10.16. Характеристика коэффициента усиления с ограничением

**10.6.** Построить фазовый портрет системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - 0,5x_2. \end{cases}$$

**10.7.** Определить параметры автоколебаний методом Гольдфарба для системы (см. рис. 10.15,  $\nu = 0$ ) с нелинейным элементом (рис. 10.17):



а)  $C = 10$ ,  $W_{\text{л}}(p) = \frac{8}{p p^2 + 2p + 5}$ ;

б)  $C = 2$ ,  $W_{\text{л}}(p) = \frac{5}{p+1 p+2 p+3}$ ;

в)  $C = 4$ ,  $W_{\text{л}}(p) = \frac{3 2p+1}{p p^2 + 7p + 4}$ .

Рис. 10.17. Статическая характеристика идеального реле

**10.8.** Определить параметры автоколебаний методом Гольдфарба для системы (см. рис. 10.15,  $\nu = 0$ ) с нелинейным элементом (рис. 10.18), где:

а)  $b = 1$ ,  $C = 5$ ,  $W_{\text{л}}(p) = \frac{10 p+3}{p p^2 + p + 2}$ ;

б)  $b = 0,5$ ,  $C = 2$ ,

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{12}{p+1 0,5p+1 0,4p+1}$$

в)  $b = 0,1$ ,  $C = 1$ ,  $W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p^3 + 5p^2 + 6p + 3}$ .

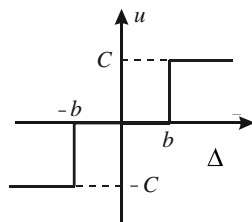


Рис. 10.18. Статическая характеристика реле с зоной нечувствительности

**10.9.** Определить параметры автоколебаний методом Коченбургера для системы (см. рис. 10.15,  $\nu = 0$ ) с нелинейным элементом (см. рис. 10.18), где:

$$\text{а) } b = 0,5, \quad C = 4, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{6}{p \, 0,25p^2 + 0,5p + 1};$$

$$\text{б) } b = 0,2, \quad C = 2, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{5}{p+1 \, p+3 \, p+7};$$

$$\text{в) } b = 0,1, \quad C = 1, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{5}{p^3 + p^2 + 2p + 10}.$$

**10.10.** Определить параметры автоколебаний методом Коченбургера для системы (см. рис. 10.15,  $\nu = 0$ ) с нелинейным элементом (рис. 10.19), где:

$$\text{а) } b = 1, \quad C = 10, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{2 \, p + 1}{p \, p^2 + 4p + 3};$$

$$\text{б) } b = 0,2, \quad C = 3,$$

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{2 \, p + 1}{p \, 0,25p + 1 \, 0,2p + 1};$$

$$\text{в) } b = 0,1, \quad C = 2, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{5}{p^3 + p^2 + 2p + 7}.$$

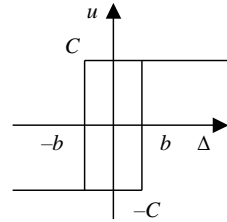


Рис. 10.19. Статическая характеристика реле с гистерезисом

**10.11.** Определить параметры автоколебаний методом В.М. Попова для системы (см. рис. 10.15,  $\nu = 0$ ) с нелинейным элементом (см. рис. 10.16), где:

$$\text{а) } C = 6, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{15}{p \, 0,5p^2 + 2p + 1};$$

$$\text{б) } C = 5, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{5}{0,1p+1 \, 0,3p+1 \, 0,4p+1};$$

$$\text{в) } C = 1, \quad W_{\text{л}}(p) = \frac{10}{p \, p^2 + 4p + 3}.$$

**10.12.** Определить параметры автоколебаний методом В.М. Попова для системы (см. рис. 10.15,  $\nu=0$ ) с нелинейным элементом (см. рис. 10.17), где:

$$\text{а) } C = 2, W_{\text{л}}(p) = \frac{6}{p \ 5p^2 + 3p + 1};$$

$$\text{б) } C = 8, W_{\text{л}}(p) = \frac{3}{p+1 \ p+4 \ 0,5p+1};$$

$$\text{в) } C = 5, W_{\text{л}}(p) = \frac{4}{p \ 0,01p^2 + 0,1p + 1}.$$

**10.13.** Исследовать влияние коэффициента  $k$  на параметры автоколебаний в системе (см. рис. 10.15,  $\nu=0$ ) с нелинейным элементом (см. рис. 10.17), где:

$$\text{а) } C = 1, W_{\text{л}}(p) = \frac{2k}{p \ p^2 + 6p + 5};$$

$$\text{б) } C = 3, W_{\text{л}}(p) = \frac{5 \ 2p + k}{5p+1 \ 3p+1 \ p+1};$$

$$\text{в) } C = 7, W_{\text{л}}(p) = \frac{k}{p \ 9p^2 + 4p + 1}.$$

**10.14.** Исследовать влияние коэффициента  $\alpha$  на параметры автоколебаний в системе (см. рис. 10.15,  $\nu=0$ ) с нелинейным элементом (см. рис. 10.18), где:

$$\text{а) } b = 0,5, \ C = 3,14, W_{\text{л}}(p) = \frac{8 \ p + \alpha}{p \ p^2 + p + 1};$$

$$\text{б) } b = 1, \ C = 10, W_{\text{л}}(p) = \frac{2}{p^3 + 4p^2 + p + \alpha}.$$



**10.15.** Записать уравнения подсистем быстрых и медленных движений для системы, математическая модель которой имеет вид:

$$а) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \mu \dot{x}_3 = -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \mu \dot{x}_1 = x_2, \\ \mu \dot{x}_2 = -5x_1 - 2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 10v; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1^2 - x_2, \\ \mu \dot{x}_2 = -x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

**10.16.** Записать уравнения подсистем быстрых и медленных движений для системы (рис. 10.20), где  $k_1 = 2$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_2 \rightarrow \infty$ .

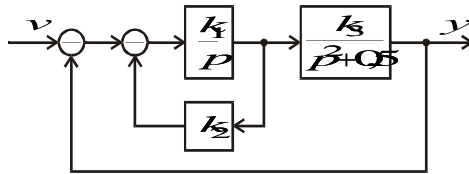


Рис. 10.20. Структурная схема системы к задаче 10.16

**10.17.** Используя метод разделения движений, определить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид:

$$а) \begin{cases} \mu \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \mu \dot{x}_2 = -x_1 - 7x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 12; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3u, \\ \mu \dot{x}_3 = -8x_1 + 3x_2 - x_3 + 5u; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \dot{x}_1 = 2,5x_1^2 + 5x_2, \\ \mu\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2 - 2x_2 + 3u. \end{cases}$$

**10.18.** Проверить, справедливо ли при  $\mu = 0,1$  разделение движений в системе, поведение которой описывают уравнения:

$$а) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 9x_2 + 5x_3, \\ \mu\dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 8u; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \mu\dot{x}_1 = 3x_1 - x_2, \\ \mu\dot{x}_2 = -x_1 - 6x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_3 = -7x_1 + x_2 - 4x_3 + u. \end{cases}$$

**10.19.** Определить численное значение  $k$ , при котором возможно разделение движений в системе (рис. 10.21), где  $W_1(p) = \frac{5}{p^2 + 7p + 1}$ ,

$$W_2(p) = \frac{k}{p + 2}.$$

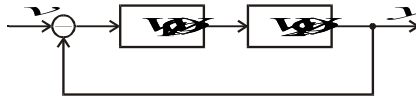


Рис. 10.21. Структурная схема системы к задаче 10.19

**10.20.** Определить численное значение  $T_1$ , при котором возможно разделение движений в системе (рис. 10.22), если  $T_2 = 0,5$ ,  $d = 0,7$ .

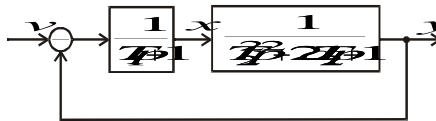


Рис. 10.22. Структурная схема системы к задаче 10.20

**10.21.** Определить численное значение  $T_2$ , при котором возможно разделение движений в системе (рис. 10.22), если  $T_1 = 2$ ,  $d = 0,5$ .

---

---

## Г л а в а 11

# СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

---

---

**В** этой главе мы обсудим центральную для теории управления задачу – синтез автоматических систем, которая становится исключительно сложной в случае нелинейных объектов. Несмотря на большое число работ, посвященных данной проблеме, общих алгоритмов синтеза практически нет. Как правило, предлагаются частные способы коррекции динамики нелинейных систем.

Тем не менее можно выделить три регулярных подхода, на основе которых могут быть разработаны процедуры расчета регуляторов. К ним относятся: метод больших коэффициентов [8, 10, 42], скользящих режимов [42] и метод локализации [8]. Первые два предполагают организацию двухэтапных процессов, когда на первом этапе возникают быстрые движения, а на втором – медленные рабочие, которым различными способами придают желаемые свойства. При определенных условиях процессы в системах на втором этапе будут инвариантны по отношению к нелинейным характеристикам и внешним возмущениям.

В этой главе мы рассмотрим метод локализации, который содержит ясную и регулярную процедуру расчета для широкого класса нелинейных объектов. Основной предварительной работой, которую необходимо проводить перед синтезом, является формализация технической задачи создания регулятора. При этом исследуются свойства объекта управления, оговариваются условия работы системы и технологические требования к ее поведению.

## 11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Как и в случае линейных систем, синтез предполагает добавление в систему (рис. 11.1) регулятора с целью обеспечения в ней требуемых динамических и статических свойств.

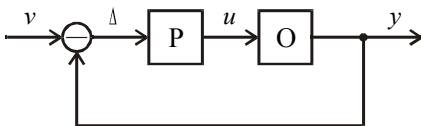


Рис. 11.1. Функциональная схема системы управления:

O – объект управления; P – регулятор

Здесь будем рассматривать одноканальные объекты, математическая модель которых имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(t, x) + B_0(t, x)u, & x \in R^n, \\ y = g(x), & u \in R^1, \quad y \in R^1, \end{cases} \quad (11.1)$$

где  $f_0(\cdot) = f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot)^T$  и  $B_0(\cdot) = b_1(\cdot), b_2(\cdot), \dots, b_n(\cdot)^T$  – вектор-функции;  $f_0(\cdot)$  удовлетворяет условиям существования и единственности решений дифференциального уравнения; функция  $g(x)$  допускает многократное дифференцирование.

Явная зависимость функций  $f_0(\cdot)$  и  $B_0(\cdot)$  от  $t$  отражает действие возмущений, которые могут быть порождены как нестационарностью характеристик самого объекта, так и действием сигнальных возмущений. Будем предполагать, что темп их изменения существенно меньше скорости основных процессов в объекте, причем известен только диапазон изменения функций (например, в виде  $|f_i(\cdot)| \leq f_{i\max}, |b_i(\cdot)| \leq b_{i\max}, i = \overline{1, n}$ ).

Цель управления состоит в определении такого управляющего воздействия  $u = u(\cdot)$ , которое обеспечивает выполнение свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v \quad (11.2)$$

с заданной статической точностью  $|\Delta(\infty)| = |v - y(\infty)| \leq \Delta^0$ .

Наряду с условием статики (11.2) предъявляются требования и к характеру переходных процессов в виде оценок

$$t_n \leq t_n^*, \quad \sigma \leq \sigma^* \quad (11.3)$$

На основе требований (11.2) и (11.3) формируется желаемое дифференциальное уравнение для замкнутой системы относительно переменных состояния

$$\dot{x} = F_x(x, v) \quad (11.4)$$

или выходной переменной

$$y^{(n)} = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, v). \quad (11.5)$$

Здесь  $v \in R^1$  – входное (задающее) воздействие на систему.

Для объектов (11.1) желаемое уравнение можно, как правило, сконструировать в виде линейного дифференциального уравнения. Предлагается следующая процедура его формирования. Сначала выбирается распределение корней, соответствующее требованиям (11.3), а затем записывается желаемое характеристическое уравнение аналогично модальному методу синтеза (см. разд. 6.5). Поскольку  $p = d/dt$  есть оператор дифференцирования, нетрудно получить линейное однородное дифференциальное уравнение. С учетом требования (11.2) записывается желаемое уравнение в виде (11.5). При необходимости от него можно перейти также к описанию в форме (11.4). В примере 11.1 приведена такая процедура.

#### ПРИМЕР 11.1

Сформировать желаемое дифференциальное уравнение второго порядка таким образом, чтобы соответствующие ему процессы удовлетворяли следующим требованиям:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ .

Выберем распределение корней, обеспечивающее заданное качество процессов, аналогично тому, как это сделано в разд. 6.5. Поскольку в системе не допускается перегулирование, они должны быть вещественными и располагаться на расстоянии не ближе  $\eta \approx 3/t_n^* = 1$  от мнимой оси. Таким образом, выбираем следующие возможные корни:

$$\lambda_1^* = -1,5, \quad \lambda_2^* = -2$$

и формируем желаемое характеристическое уравнение

$$C(p) = (p - \lambda_1^*)(p - \lambda_2^*) = p^2 + 3,5p + 3 = 0.$$

От него перейдем к желаемому однородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + 3,5\dot{y} + 3y = 0.$$

С учетом требования (11.2) запишем уравнение

$$\ddot{y} + 3,5\dot{y} + 3y = 3v,$$

которое представим в виде

$$\ddot{y} = -3,5\dot{y} - 3y + 3v = F(y, \dot{y}, v),$$

т. е. получим окончательно неоднородное желаемое дифференциальное уравнение, которое имеет форму (11.5).

## 11.2. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Поставив задачу синтеза, необходимо убедиться в том, что она будет иметь решение. С этой целью предварительно следует проанализировать возможности объекта управления и требования, предъявляемые к качеству работы системы.

### 11.2.1. РЕАЛИЗУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ

**Реализуемым** будем называть такое **состояние равновесия**, в котором можно удержать систему с помощью конечного управляющего воздействия.

Рассмотрим, какие состояния равновесия будут реализуемыми для объекта (11.1). Для этого исходное уравнение представим в форме

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\cdot) + B^1(\cdot)u, \\ \dot{x}_n = f_n(\cdot) + b_n(\cdot)u. \end{cases} \quad (11.6)$$

Здесь  $x^1 = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}^T$  – усеченный вектор состояния (без последней координаты);  $f^1(\cdot) = f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_{n-1}(\cdot)^T$  – усеченная вектор-функция;  $B^1(\cdot) = b_1(\cdot), b_2(\cdot), \dots, b_{n-1}(\cdot)^T$  – усеченная вектор-функция,  $b_n(t, x) \neq 0 \quad \forall (x \in \Omega_x, t)$ ;  $\Omega_x$  – область допустимых значений переменных состояния.

Запишем для объекта (11.6) уравнения равновесного режима

$$\begin{cases} 0 = f^1(\cdot) + B^1(\cdot)u, \\ 0 = f_n(\cdot) + b_n(\cdot)u. \end{cases} \quad (11.7)$$

Из второго уравнения (11.7) определим управляющее воздействие

$$u = -\frac{f_n(\cdot)}{b_n(\cdot)}$$

и подставим в первое. Получим уравнение

$$\varphi(\cdot) = f^1(\cdot) - B^1(\cdot) \frac{f_n(\cdot)}{b_n(\cdot)} = 0, \quad (11.8)$$

которое и описывает реализуемые равновесные состояния объекта (11.1). Отметим, что (11.8) задает в пространстве состояний поверхность  $(n-1)$ -го порядка (рис. 11.2).

Реализуемым состоянием равновесия для данного объекта будет лишь то, которое находится на этой поверхности. Этот факт следует учитывать при формировании уравнений (11.4) и (11.5).

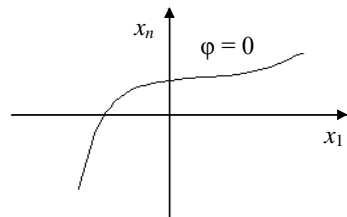


Рис. 11.2. Иллюстрация реализуемых равновесных состояний

**ПРИМЕР 11.2**

Определить множество реализуемых равновесных состояний для объекта, математическая модель которого имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 3u. \end{cases}$$

Запишем уравнения статики

$$\begin{cases} -x_1^0 + x_2^0 + u = 0, \\ -2x_1^0 - x_2^0 + 3u = 0. \end{cases}$$

Определим управляющее воздействие из первого уравнения

$$u = x_1 - x_2$$

и подставим во второе. После преобразования получим уравнение множества реализуемых равновесных состояний в виде

$$x_2^0 = 0,25x_1^0.$$

Как видим, графической интерпретацией этого множества в пространстве состояний является прямая. Стабилизировать объект управления в других состояниях нельзя.

### 11.2.2. РЕАЛИЗУЕМЫЕ ЖЕЛАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Реализуемыми** будем называть такие **желаемые дифференциальные уравнения**, которым можно подчинить поведение замкнутой системы с помощью конечных управляющих воздействий.

Так как желаемые уравнения могут быть сформированы в соответствии с требованиями к качеству процессов относительно различных переменных, то для каждой из этих ситуаций получим условия реализуемости.

1. Рассмотрим случай, когда в замкнутой системе требуется обеспечить желаемые свойства по переменным состояниям. Представим уравнения объекта (11.1) в форме (11.6):

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\cdot) + B^1(\cdot)u, \\ \dot{x}_n = f_n(\cdot) + b_n(\cdot)u. \end{cases} \quad (11.9)$$



Аналогичным образом запишем желаемое уравнение (11.4)

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = F_{x^1}(\cdot), \\ \dot{x}_n = F_{x_n}(\cdot). \end{cases} \quad (11.10)$$

Приравнявая правые части соответствующих уравнений (11.9) и (11.10), проверим, существует ли конечное управление, обеспечивающее выполнение этого условия. В результате имеем

$$\begin{cases} f^1(\cdot) + B^1(\cdot)u = F_{x^1}(\cdot), \\ f_n(\cdot) + b_n(\cdot)u = F_{x_n}(\cdot). \end{cases} \quad (11.11)$$

Так как  $b_n(\cdot) \neq 0$ , то из (11.11) можно определить в явном виде

$$u = \frac{1}{b_n(\cdot)} [F_{x_n}(\cdot) - f_n(\cdot)] \quad (11.12)$$

и подставить (11.12) в первое уравнение (11.11). Оно представляет собой тождество только в том случае, когда желаемое уравнение для переменных  $x^1$  задано в виде

$$F_{x^1}(\cdot) = f^1(\cdot) + B^1(\cdot) \frac{1}{b_n(\cdot)} [F_{x_n}(\cdot) - f_n(\cdot)].$$

Следовательно, произвольным образом формировать уравнения (11.4) в рассматриваемой ситуации нельзя. Реализуемыми уравнениями будут следующие:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\cdot) + B^1(\cdot) \frac{1}{b_n(\cdot)} [F_{x_n}(\cdot) - f_n(\cdot)], \\ \dot{x}_n = F_{x_n}(\cdot). \end{cases} \quad (11.13)$$

Отметим здесь важный факт. Мы показали, что существует закон управления (11.12), который обеспечивает точное решение поставленной задачи синтеза. Однако реализовать его на практике невозможно, так как полностью функции  $f_0(\cdot)$  и  $B_0(\cdot)$  неизвестны, кроме границ их изменения. Следовательно, алгоритм управления (11.12) является предельным, к нему необходимо стремиться при проектировании реального регулятора.

**ПРИМЕР 11.3**

Проверить, являются ли реализуемыми желаемые уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, v) = -2x_1 + x_2 + v, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, v) = -x_1 - 4x_2 + v \end{cases}$$

для объекта со следующей математической моделью:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u. \end{cases}$$

Приравняем правые части желаемого уравнения и объекта для переменной  $x_2$ :

$$-x_1 - 4x_2 + v = -2x_1 - 3x_2 + u$$

и определим управление

$$u = x_1 - x_2 + v.$$

Приравняв правые части желаемого уравнения и объекта для переменной  $x_1$ , с учетом найденного управления получим

$$-2x_1 + x_2 + v \neq -3x_1 - x_2 + v.$$

Следовательно, желаемые уравнения являются нереализуемыми для заданного объекта.

Реализуемыми для него будут, например, следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, v) = -3x_1 - x_2 + v, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, v) = -x_1 - 4x_2 + v. \end{cases}$$

2. Обсудим теперь условия реализуемости для ситуации, когда желаемое уравнение задано относительно выходных переменных в виде (11.5).

В этом случае будем последовательно  $n$  раз дифференцировать  $y$  и перейдем от описания объекта в переменных состояния (11.1) к уравнению

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) + b(t, y, \dots, y^{(n-1)})u, \quad (11.14)$$

где для функций  $f(\cdot)$  и  $b(\cdot)$  известен только диапазон их изменения:

$$|f(\cdot)| \leq f_{\max}, \quad |b(\cdot)| \leq b_{\max}.$$

Приравняем правые части уравнений (11.5) и (11.14)

$$F(\cdot) = f(\cdot) + b(\cdot)u$$

и при условии

$$b(t, y, \dots, y^{(n-1)}) \neq 0 \quad \forall y \in \Omega_y, t \in [0; \infty) \quad (11.15)$$

определим управляющее воздействие

$$u = b^{-1}(\cdot) F(\cdot) - f(\cdot) . \quad (11.16)$$

Как и в предыдущем случае, уравнение (11.16) является предельным и обеспечивает точное решение задачи синтеза, но не может быть реализовано на практике из-за неизвестных функций  $f(\cdot)$  и  $b(\cdot)$ .

Отметим, что условие (11.15) есть условие реализуемости желаемого дифференциального уравнения (11.5).

### 11.3. МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ

Метод локализации как метод синтеза нелинейных нестационарных систем разрабатывается научной школой при кафедре автоматики Новосибирского государственного технического университета около 35 лет. Его основная идея заключается в использовании (в обратной связи) вектора скорости изменения переменных состояния  $\dot{x}$  в случае описания объекта (11.1) или старшей производной выходной переменной для объектов (11.14). Таким образом, предлагается [8] формировать алгоритм управления в виде функции

$$u = u(x, \dot{x}, v) . \quad (11.17)$$

Использование в нем вектора скорости (старшей производной) позволяет иметь косвенную оценку правой части дифференциального уравнения объекта, т. е. получать текущую информацию о нелинейных характеристиках и внешних возмущениях.

Достаточно простым законом управления типа (11.17) является следующий:

$$u = K F_x(x, v) - \dot{x} , \quad (11.18)$$

где  $K$  – матрица коэффициентов усиления регулятора.

Предварительно на примере систем первого порядка обсудим возможности алгоритма управления (11.18), а затем рассмотрим процедуру синтеза для одноканальных объектов произвольного порядка.

### 11.3.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Математическая модель объекта первого порядка имеет вид

$$\dot{y} = f(t, y) + b(t, y)u, \quad y \in R^1, \quad (11.19)$$

причем  $|f(\cdot)| \leq f_{\max}$ ,  $|b(\cdot)| \leq b_{\max}$  и  $b(t, y) \neq 0 \quad \forall y \in \Omega_y, t \in [0; \infty)$ .

Эталонное уравнение для выходной величины формируется на основе требований (11.2) и (11.3):

$$\dot{y} = F(y, v). \quad (11.20)$$

Зададим закон управления

$$u = k F(y, v) - \dot{y} \quad (11.21)$$

и, подставляя (11.21) в (11.19), запишем уравнение замкнутой системы

$$\dot{y} = f(t, y) + b(t, y)k F(y, v) - \dot{y},$$

которое разрешим относительно  $\dot{y}$ :

$$\dot{y} = \frac{f(t, y)}{1 + b(t, y)k} + \frac{b(t, y)k}{1 + b(t, y)k} F(y, v). \quad (11.22)$$

Будем увеличивать коэффициент усиления и в пределе при  $k \rightarrow \infty$  вместо (11.22) получим

$$\dot{y} = F(y, v).$$

Таким образом, соответствующий выбор параметров регулятора позволяет обеспечить в замкнутой системе требуемые свойства (11.20) с точностью

$$\Delta = \frac{f(t, y) - F(y, v)}{1 + b(t, y)k}. \quad (11.23)$$

Отметим, что все нелинейности и действующие на объект внешние возмущения, отраженные в функциях  $f(t, y)$  и  $b(t, y)$ , подавляются большим коэффициентом  $k$ , численные значения которого рекомендуется выбирать по соотношению

$$|b_{\min}|k \approx (20 \dots 100). \quad (11.24)$$

В этом случае точность обеспечения требуемых свойств (11.23) будет составлять

$$\Delta \approx (0,05 \dots 0,01)f(t, y),$$

что соответствует обычной в практике 5%-ной зоне ошибок.

Полученный эффект объясняется структурной локализацией возмущений, что иллюстрирует схема системы, показанная на рис. 11.3.

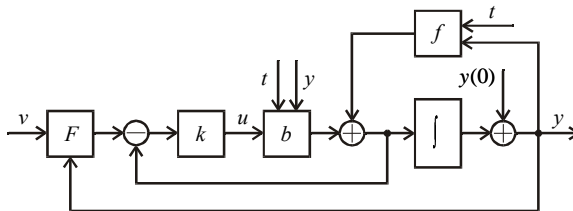


Рис. 11.3. Структурная иллюстрация метода

Как видим, система двухконтурная: внешний контур образован обычной обратной связью по выходной переменной, а внутренний – обратной связью по производной. Именно в нем локализовано влияние функций  $f(t, y)$  и  $b(t, y)$ , которое подавляется коэффициентом усиления  $k$ .

Отметим, что внутренний контур является безынерционным, так как не содержит инерционных звеньев.

Для реализации закона (11.21) необходимо убедиться в том, что численные значения управления в любой момент времени не будут превышать имеющегося ресурса объекта. С этой целью исследуем управляющее воздействие в замкнутой системе, подставляя в (11.21) вместо  $\dot{y}$  правую часть уравнения (11.19):

$$u = k F(\cdot) - f(\cdot) - b(\cdot)u.$$

После несложных преобразований получим

$$u = \frac{k}{1 + b(\cdot)k} F(\cdot) - f(\cdot) .$$

В асимптотике при  $k \rightarrow \infty$  управляющее воздействие в замкнутой системе принимает вид

$$u = b^{-1}(\cdot) F(\cdot) - f(\cdot) . \quad (11.25)$$

Отсюда следуют несколько важных выводов.

1. Асимптотическое управление (11.25) совпадает с управляющим воздействием (11.16), соответствующим точному решению поставленной задачи синтеза. Следовательно, основанный на методе локализации закон (11.21) представляет собой неявную реализацию «точного» управления (11.16).

2. Управляющее воздействие в замкнутой системе остается конечным даже при бесконечном коэффициенте усиления.

3. Выражение (11.25) позволяет определить максимальное значение управления в наихудшей ситуации, когда все функции достигают своих предельных значений

$$u_{\max} = \left| b_{\min}^{-1} \right| \left| F_{\max} \right| + \left| f_{\max} \right| .$$

Больше этого значения управление в замкнутой системе быть не может. Если выполняется условие

$$u_{\max} = \left| b_{\min}^{-1} \right| \left| F_{\max} \right| + \left| f_{\max} \right| \leq \left| \bar{U} \right| , \quad (11.26)$$

то в ней можно обеспечить желаемые процессы (11.20).

### 11.3.2. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ ИЗМЕРЕНИЯ

Выходная переменная физической системы измеряется датчиком, который всегда имеет некоторую помеху измерения. Как известно, дифференцирование усиливает влияние высокочастотных помех, поэтому в системах с законом управления (11.21) важно оценить их влияние.

Полагаем, что выходная переменная датчика имеет вид

$$\tilde{y} = y + h(t), \quad (11.27)$$

где  $h(t)$  – помеха измерения.

Закон управления (11.21) в этом случае принимает форму

$$u = k \left[ F(\tilde{y}, v) - \dot{\tilde{y}} \right]. \quad (11.28)$$

С учетом (11.27) и (11.19) запишем управление в замкнутой системе

$$u = k \left[ F(\cdot) - f(\cdot) - b(\cdot)u - \dot{h} \right]$$

или после преобразований

$$u = \frac{k}{1 + b(\cdot)k} \left[ F(\cdot) - f(\cdot) - \dot{h} \right]. \quad (11.29)$$

В пределе при  $k \rightarrow \infty$  асимптотическое управление будет следующим:

$$u = b^{-1}(\cdot) \left[ F(\cdot) - f(\cdot) - \dot{h} \right], \quad (11.30)$$

где слагаемое

$$u_h = -b^{-1}(\cdot)\dot{h} \quad (11.31)$$

определяет «вклад» помехи в управление. Сравнение (11.25) и (11.30) показывает, что при наличии помехи измерения может требоваться больший ресурс управления для объекта, чем без нее.

Выражение (11.30) следует иметь в виду при выборе датчика.

### 11.3.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЙ ФИЛЬТР

При практической реализации закона управления (11.21) необходимо оценивать производную  $\dot{y}$ . С этой целью в систему следует добавить специальное устройство, реализованное на интеграторах, которое будем называть **дифференцирующим фильтром** [8]. Он представляет собой динамическую систему первого порядка

$$\mu \dot{\hat{y}} + \hat{y} = y \quad (11.32)$$

или второго

$$\mu^2 \ddot{\hat{y}} + 2d\mu \dot{\hat{y}} + \hat{y} = y, \quad (11.33)$$

выбираемую в зависимости от частотного состава и уровня помех измерения. Здесь  $\hat{y}$  – измеренное значение выходной переменной;  $\mu$  – малый параметр, отражающий инерционность фильтра.

Структурная схема дифференцирующего фильтра второго порядка показана на рис. 11.4.

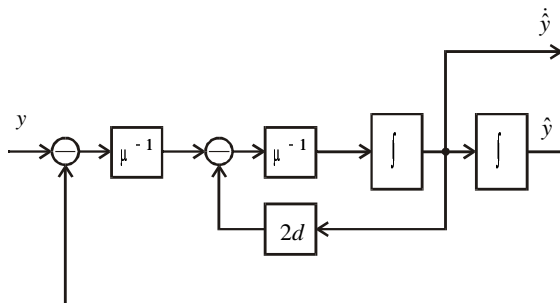


Рис. 11.4. Структурная интерпретация фильтра второго порядка

Поскольку дифференцирующий фильтр является линейным звеном, можно записать его передаточную функцию

$$W_{\Phi}(p) = \frac{\dot{\hat{y}}}{y} = \frac{1}{D(\mu p)}, \quad (11.34)$$

где  $D(\mu p)$  – характеристический полином фильтра, его будем называть также «**фильтрующим**» полиномом.

Покажем, что это устройство действительно позволяет получить оценку производной, выражение для которой с учетом (11.34) представим в виде

$$\dot{\hat{y}} = \frac{p}{D(\mu p)} y.$$

Так как  $p$  есть оператор дифференцирования, то  $py = \dot{y}$  и

$$\dot{\hat{y}} = \frac{1}{D(\mu p)} \dot{y}.$$



При  $\mu \rightarrow 0$  получим  $\dot{\hat{y}} \rightarrow \dot{y}$ , т. е. оценка производной совпадает с ее точным значением. Таким образом, для реализации закона управления (11.21) необходимо использовать дифференцирующий фильтр с малой инерционностью. На практике достаточно, чтобы инерционность фильтра была на порядок меньше, чем основные процессы в системе.

Заметим, что наличие таких звеньев приводит к возникновению в системе разнотемповых процессов, причем для ее работоспособности быстрые движения должны быть устойчивыми.

### 11.3.4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МАЛЫХ ИНЕРЦИОННОСТЕЙ

С помощью метода разделения движений выделим медленные и быстрые процессы в системе с дифференцирующим фильтром (рис. 11.5).

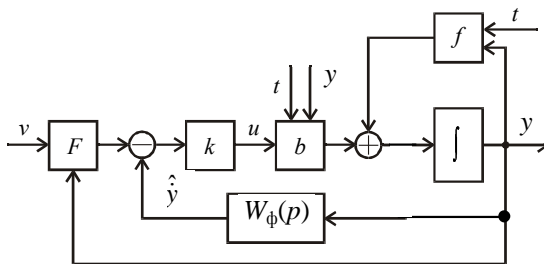


Рис. 11.5. Структурная схема системы с фильтром

При использовании фильтра первого порядка уравнения замкнутой системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{y} = f(\cdot) + b(\cdot)k [F(\cdot) - \dot{\hat{y}}], \\ \mu \dot{\hat{y}} = y - \hat{y}. \end{cases} \quad (11.35)$$

Поскольку первое уравнение содержит производную в правой части, необходимо сначала представить описание в стандартной форме. С этой целью введем новую переменную

$$z = \mu^{-1}(y - \hat{y})$$

и получим следующую математическую модель системы:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(\cdot) + b(\cdot)k F(\cdot) - z, \\ \mu \dot{z} = f(\cdot) + b(\cdot)k F(\cdot) - z - z. \end{cases} \quad (11.36)$$

Выделим подсистему быстрых движений

$$y = \text{const}, \quad \mu \dot{z} = f(\cdot) + b(\cdot)k F(\cdot) - z - z.$$

Запишем характеристическое уравнение подсистемы быстрых движений (рис. 11.6)

$$\mu p + bk + 1 = 0.$$

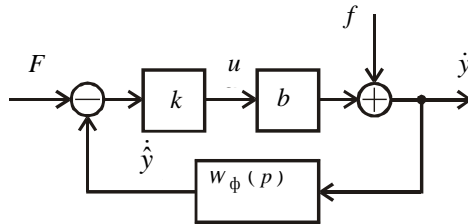


Рис. 11.6. Структурная схема контура быстрых движений

В общем случае с учетом  $D(\mu p)$  оно принимает вид

$$D(\mu p) + bk = 0. \quad (11.37)$$

Как видим, контур быстрых движений линейный, поэтому для анализа устойчивости можно применять известные критерии устойчивости (см. главу 4). Если используется фильтр первого или второго порядка, то этот контур будет устойчив при любых положительных значениях  $b(\cdot)$ .

Выделим теперь медленные движения, полагая в (11.36)  $\mu = 0$ ,

$$\dot{y} = f(\cdot) + b(\cdot)k F(\cdot) - z, \quad f(\cdot) + b(\cdot)k F(\cdot) - z = z.$$

Так как  $f(\cdot) + b(\cdot)k F(\cdot) - z = \dot{y}$ , то уравнения подсистемы медленных движений можно записать в форме

$$\dot{y} = f(t, y) + b(t, y)k F(y, v) - \dot{y}$$

или окончательно

$$\dot{y} = \frac{f(t, y)}{1 + b(t, y)k} + \frac{b(t, y)k}{1 + b(t, y)k} F(y, v). \quad (11.38)$$

Таким образом, описание медленных процессов в системе (11.38) совпадает с уравнением замкнутой системы с точным дифференцированием (11.22). Следовательно, при устойчивых быстрых движениях поведение системы определяют медленные процессы, которые при соответствующем выборе коэффициента регулятора будут с заданной точностью близки к желаемому (11.20). Расчетная структурная схема системы с фильтром представлена на рис. 11.7.

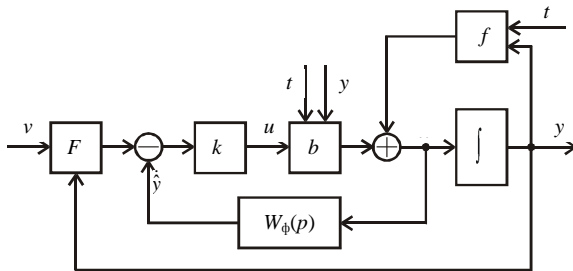


Рис. 11.7. Расчетная структурная схема системы с дифференцирующим фильтром

Отметим, что контур локализации здесь инерционный и является контуром быстрых движений.

### 11.3.5. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА

В подразд. 11.4.3 мы показали, что при достаточно малом  $\mu$  дифференцирующий фильтр позволяет получить оценку производной. Рассмотрим теперь работу устройства при наличии помех измерения. Поскольку наиболее существенное влияние  $h(t)$  оказывает на управляющее воздействие (см. подразд. 11.4.2), которое является «быстрой» переменной, исследуем отдельно контур быстрых движений (рис. 11.8).

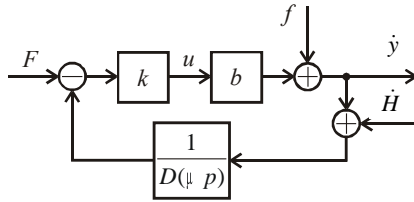


Рис. 11.8. Контур быстрых движений с учетом помехи измерения

Так как этот контур линейный и для него справедлив принцип суперпозиции, то определим реакцию  $u$  на воздействие  $\dot{h}(t)$ :

$$u = -\frac{W_{\phi}(\mu p)k}{1 + W_{\phi}(\mu p)kb} \dot{h}(t),$$

которую можно представить в виде

$$u = -W_{\kappa}(\mu p)h = -\frac{kp}{D(\mu p) + kb} h, \quad (11.39)$$

где  $W_{\kappa}(\mu p)$  – передаточная функция контура.

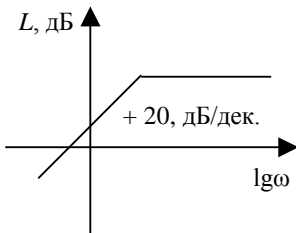


Рис. 11.9. ЛАЧХ контура с фильтром первого порядка

Рассмотрим теперь влияние полинома  $D(\mu p)$ , при этом выделим два варианта.

1. В случае дифференцирующего фильтра первого порядка  $D(\mu p) = \mu p + 1$ . При этом асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика, соответствующая  $W_{\kappa}(\mu p)$ , имеет вид, показанный на рис. 11.9.

Как видим, высокочастотная помеха будет проходить с постоянным коэффициентом усиления.

При использовании фильтра второго порядка  $D(\mu p) = \mu^2 p^2 + 2d\mu p + 1$  соответствующая асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика представлена на рис. 11.10. Очевидно, что в этом случае высокочастотная помеха будет отфильтровываться контуром.

2. Таким образом, порядок  $D(\mu p)$  полинома должен быть выше порядка требуемого дифференцирования (хотя бы на единицу). Только при этом условии в контуре быстрых движений будет подавляться высокочастотная помеха измерения.

Выбирать конкретные численные значения параметров фильтрующего полинома необходимо с учетом условий разделимости движений в системе. На практике можно пользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \mu \approx 0,1T^* , \\ d \approx (0,5 \dots 0,7), \end{cases} \quad (11.40)$$

где  $T^*$  – желаемая постоянная времени,  $t_n^* \approx 3T^*$ .

### 11.3.6. СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Обсудим задачу синтеза системы управления на основе метода локализации для объекта, математическая модель которого имеет вид уравнения произвольного порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) + b(t, y, \dots, y^{(n-1)})u, \quad (11.41)$$

где  $|f(\cdot)| \leq f_{\max}$ ,  $|b(\cdot)| \leq b_{\max}$  и  $b(t, y) \neq 0 \quad \forall y \in \Omega_y, t \in [0; \infty)$ .

Желаемая динамика задается эталонным уравнением  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, v). \quad (11.42)$$

Закон управления следует формировать в виде

$$u = k \left[ F(\cdot) - y^{(n)} \right]. \quad (11.43)$$

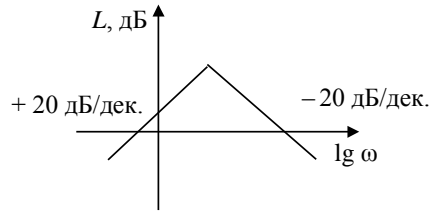


Рис. 11.10. ЛАЧХ контура с фильтром второго порядка

Подставив (11.43) в (11.42), запишем уравнение замкнутой системы, которое разрешим относительно  $y^{(n)}$ :

$$y^{(n)} = \frac{f(\cdot)}{1+b(\cdot)k} + \frac{b(\cdot)k}{1+b(\cdot)k} F(\cdot). \quad (11.44)$$

Увеличивая коэффициент усиления, в пределе при  $k \rightarrow \infty$  получим  $y^{(n)} \rightarrow F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, v)$ . Следовательно, и для объекта произвольного порядка соответствующий выбор параметров регулятора позволяет обеспечить в замкнутой системе требуемые процессы (11.42) с точностью (11.23).

Аналогично случаю, рассмотренному в подразд. 11.3.1, численные значения коэффициента  $k$  рекомендуется выбирать по соотношению (11.24), т. е.

$$|b_{\min}|k \approx (20 \dots 100).$$

Управляющее воздействие в замкнутой системе остается конечным даже при бесконечном коэффициенте усиления, его максимальное значение определяется соотношением (11.26) и не должно превышать ресурса управления объекта. При действии помехи измерения асимптотическое управление имеет вид

$$u = b^{-1}(\cdot) \left[ F(\cdot) - f(\cdot) - h^{(n)}(t) \right]. \quad (11.45)$$

Как видим, здесь присутствует  $n$ -я производная помехи, т. е. ее влияние усиливается еще больше, чем в системах первого порядка. Очевидно, что в систему нужно добавить дифференцирующий фильтр с порядком фильтрующего полинома выше порядка требуемого дифференцирования (рис. 11.11).

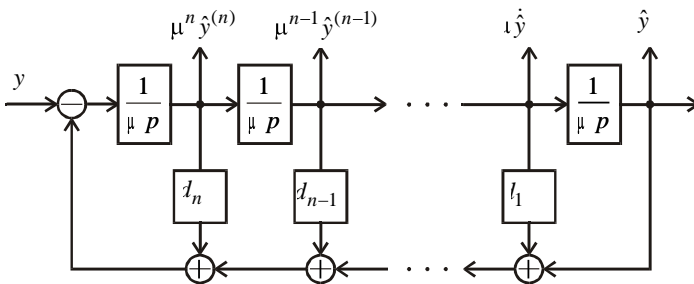


Рис. 11.11. Структурная схема фильтра произвольного порядка

Передаточная функция такого устройства имеет вид

$$W_{\phi}(\mu p) = \frac{1}{D(\mu p)} = \frac{1}{\mu^{n+1} p^{n+1} + d_n \mu^n p^n + \dots + d_1 \mu p + 1}, \quad (11.46)$$

где  $\mu$  – малый параметр, отражающий инерционность фильтра;  $d_i, i = \overline{1, n}$ , определяет качество процессов в фильтре. Расчет фильтра осуществляется модальным методом, а желаемое распределение корней выбирается на основе оценок

$$t_k \approx 0, 1t_n^*, \quad \sigma_k \approx \sigma^*. \quad (11.47)$$

Расчетная структурная схема системы показана на рис. 11.12.

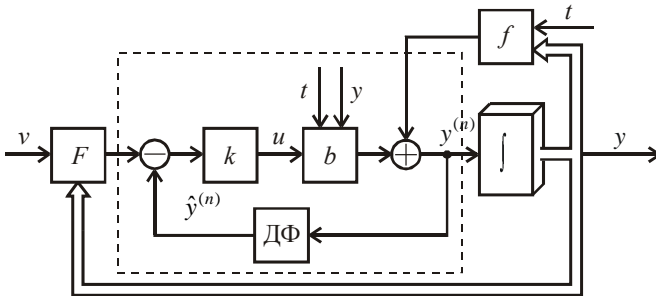


Рис. 11.12. Расчетная структурная схема системы произвольного порядка с нулевыми начальными условиями

Пунктиром выделен контур быстрых движений, уравнение которого имеет вид (11.36). Целью расчета для него является обеспечение устойчивости. Если контур оказывается неустойчивым, то его необходимо корректировать, используя аппарат линейных систем.

### 11.3.7. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ЛОКАЛИЗАЦИИ

На основе рассмотренных соотношений можно предложить следующую процедуру расчета регулятора.

1. Проверяются условия разрешимости задачи синтеза для исходного объекта управления.
2. По требованиям к качеству процессов (11.2) и (11.3) составляется эталонное уравнение  $n$ -го порядка (11.41).

3. Рассчитывается коэффициент усиления регулятора  $k$  по соотношению (11.24).

4. Выбирается дифференцирующий фильтр вида (11.46), который должен быть малоинерционным и подавлять высокочастотные помехи.

5. Проверяется устойчивость контура быстрых движений по характеристическому уравнению (11.37) и при необходимости в него вводится корректирующее звено.

6. Предлагается схемная реализация регулятора (с учетом дифференцирующего фильтра) на активных элементах.

#### ПРИМЕР 11.4

Математическая модель объекта управления имеет вид

$$\ddot{y} = -3y^2 + \dot{y} + b(t)u,$$

где  $|y| \leq 20$ ,  $|\dot{y}| \leq 40$ ,  $2 \leq b \leq 5$ ,  $|u| \leq 800$ .

Рассчитать регулятор на основе метода локализации, обеспечивающий следующее качество переходного процесса в замкнутой системе:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ ,  $\Delta \leq 5\% \rightarrow$  от  $v$ .

Так как  $b(t) \neq 0$ , то задача синтеза имеет решение. Сформируем следующее желаемое дифференциальное уравнение второго порядка (см. пример 11.1):

$$\ddot{y} = F(y, \dot{y}, v) = -3,5\dot{y} - 3y + 3v.$$

Запишем закон управления

$$u = k(F(\dot{y}, y, v) - \ddot{y})$$

и определим численное значение коэффициента усиления регулятора. Поскольку задана 5%-ная статическая точность, с этой же точностью будем обеспечивать желаемые свойства в системе, т.е. выбираем  $b_{\min}k \approx 20$ .

Следовательно, можно принять  $k = 10$ .

Определим теперь максимальные значения функций

$$|F_{\max}| = 3,5 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 1 = 203,$$

$$|f_{\max}| = 3 \cdot 400 + 40 = 1240$$

и проверим ресурсное ограничение согласно (11.26):

$$U_{\max} = 0,5(1240 + 203) = 721,5 < 800.$$



Таким образом, ресурса управления достаточно для реализации сформированного желаемого уравнения.

При отсутствии помехи для оценки производных можно использовать дифференцирующий фильтр второго порядка с передаточной функцией

$$W_{\Phi}(\mu p) = \frac{1}{D(\mu p)} = \frac{1}{\mu^2 p^2 + 2d\mu p + 1},$$

где  $\mu \approx 0,1 \frac{t_n^*}{3} = 0,1 \text{ с}$ ,  $d = 0,7$ .

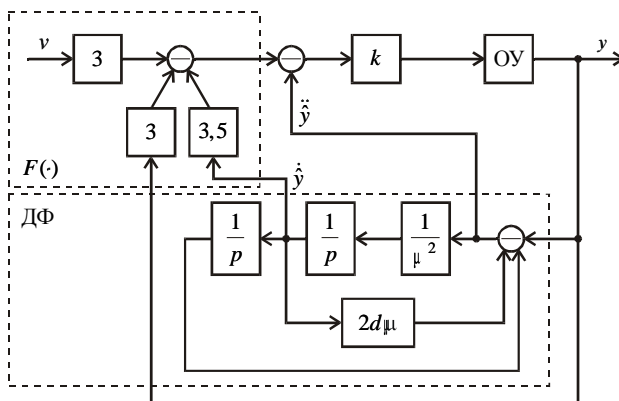


Рис. 11.13. Схема замкнутой системы

Контур быстрых движений в этом случае будет устойчивым. На рис. 11.13 приведена схема замкнутой системы с учетом реализации регулятора.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели эффективный подход к синтезу нелинейных систем, названный методом локализации. Общей идеей формирования на его основе алгоритмов управления является использование в обратной связи производной вектора состояния или старшей производной выходной переменной, что позволяет иметь текущую оценку нелинейных характеристик объекта и действующих на него внешних возмущений.

Отметим, что реализация закона управления предполагает использование специального фильтра с малой инерционностью, поэтому для исследования поведения замкнутых систем применяется метод разделения движений. Поведение всей системы в этом случае определяют медленные движения, которые при выборе коэффициента усиления регулятора согласно приведенным рекомендациям будут соответствовать желаемому уравнению динамики для выходной переменной.

## З А Д А Ч И

**11.1.** Уравнение объекта имеет вид

$$\ddot{y} + y + 2\dot{y} + 4y = u + M(t).$$

Записать желаемое дифференциальное уравнение для выходной переменной, удовлетворяющее следующим оценкам качества переходного процесса:  $t_n \leq 0,5$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ .

**11.2.** Уравнения объекта имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = f(t, x_1, x_2) + b(t, x_3)u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Записать желаемое дифференциальное уравнение для выходной переменной, удовлетворяющее следующим оценкам качества переходного процесса:  $t_n \leq 2$  с,  $\sigma \leq 20\%$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ .

**11.3.** Уравнения объекта имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 10u + M(t), \\ y = x_1. \end{cases}$$

Сформировать закон управления на основе метода локализации и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 1$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v.$$

**11.4.** Для объекта, дифференциальное уравнение которого имеет вид

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = u + M(t),$$

рассчитать регулятор на основе метода локализации и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ .

**11.5.** Для объекта, дифференциальные уравнения состояния которого имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2) + b(t)u, \\ y = x_1, \\ |f| \leq 150, \quad 2 \leq b \leq 5, \end{cases}$$

рассчитать регулятор на основе метода локализации и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 1,5$  с,  $\sigma \leq 30$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ ,

$$\Delta^0 \leq 5\% \text{ от } v.$$

**11.6.** Уравнение объекта имеет вид

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) + b(t)u,$$

где  $|\dot{y}| \leq 30$ ,  $|y| \leq 50$ ,  $|f| \leq 100$ ,  $0,5 \leq b \leq 8$ . Рассчитать регулятор на основе метода локализации с учетом дифференцирующего фильтра и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 5$  с,  $\sigma \leq 0$ ,

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ . Оценить устойчивость контура быстрых движений.

**11.7.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = f(t, x_1, x_2, x_3) + b(t, x_1)u, \\ y = x_1, \end{cases}$$

где  $|x_1| \leq 50$ ,  $|x_2| \leq 80$ ,  $|x_3| \leq 100$ ,  $|f| \leq 300$ ,  $3 \leq b \leq 10$ . Рассчитать регулятор на основе метода локализации с учетом дифференцирующего фильтра и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 2$  с,  $\sigma \leq 20\%$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ . Оценить устойчивость контура быстрых движений.

**11.8.** Поведение объекта описывает уравнение

$$\ddot{y} = a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y + b(t)u,$$

где  $-15 \leq a_1 \leq 3$ ,  $4 \leq a_2 \leq 20$ ,  $5 \leq b \leq 9$ . Рассчитать для него регулятор на основе метода локализации с учетом наличия помех и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 1$  с,  $\sigma = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ .

**11.9.** Поведение объекта описывает уравнение

$$\ddot{y} = a(t)\dot{y} + 2y + 3u,$$

где  $2 \leq a \leq 6$ ,  $|u| \leq 100$ . Рассчитать регулятор на основе метода локализации с учетом дифференцирующего фильтра минимального порядка и следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 10$  с,  $\sigma \leq 30\%$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ . Изобразить структурную схему системы.

**11.11.** Поведение объекта описывает уравнение

$$\ddot{y} + \dot{y} + a(t)y^2 = b(t)u,$$

где  $|a| \leq 7$ ,  $0,3 \leq b \leq 2$ ,  $|u| \leq 300$ . Рассчитать для него регулятор на основе метода локализации при наличии помех и дифференцирующего фильтра с учетом следующих оценок качества переходного процесса:  $t_n \leq 2,5$  с,  $\sigma \leq 10\%$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = v$ . Изобразить структурную схему системы.

---

---

## Глава 12

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА

---

---

**Р**азвитие технологических процессов в промышленности часто приводит к необходимости текущей оптимизации (настройки на экстремум) отдельных агрегатов. В случае, когда требуется на экстремальном уровне поддерживать некоторый показатель качества работы динамической системы, зависящий от параметров объекта и действующих на него возмущений, необходимо создавать специальные автоматические системы, которые называют экстремальными или системами автоматического поиска экстремума.

Такая задача возникает, например, при поддержании скорости полета самолета, соответствующей минимуму расхода горючего на единицу длины пути. Примером системы автоматического поиска экстремума является система поддержания максимальной скорости проходки скважины турбобуром при меняющихся свойствах грунта [32, 37].

Содержанием этой главы является решение задачи поиска экстремума методами теории автоматического управления. При этом большое внимание уделяется оценке градиента выходной характеристики системы.

### 12.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Системой поиска экстремума** будем называть такую систему автоматического управления, которая в процессе работы обеспечивает достижение минимума или максимума некоторого показателя качества при недостаточной априорной информации о характере его изменений.

При этом положение экстремума и аналитическое выражение функции качества в общем случае неизвестны. Предположим только, что функция качества унимодальна.

Под действием различных возмущений экстремальная характеристика объекта  $Y(y)$  может смещаться или, как принято говорить, дрейфовать с искажением или без искажения формы. При этом можно выделить следующие виды дрейфа:

- вертикальный дрейф – положение экстремума изменяется по вертикали (рис. 12.1, *а*);
- горизонтальный дрейф – экстремум смещается по горизонтали;
- смешанный дрейф – экстремум изменяет положение и по вертикали, и по горизонтали (рис. 12.1, *б*).

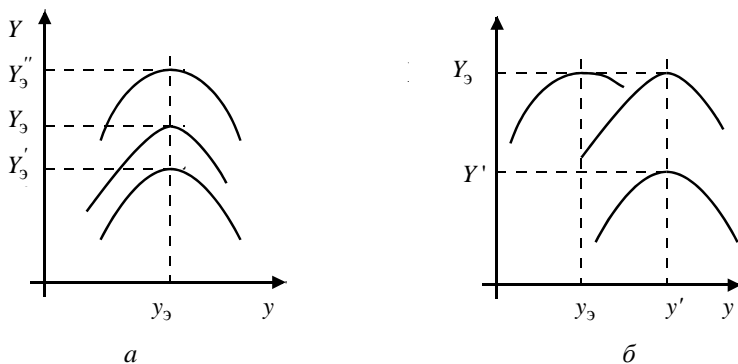


Рис. 12.1. Иллюстрация дрейфа экстремальной характеристики:

*а* – по вертикали; *б* – по горизонтали и по вертикали

В первом случае достаточно каким-либо образом (аналитически или экспериментально) один раз определить положение экстремума, а затем синтезировать обычную систему стабилизации. Во втором и третьем случаях необходимо следить за экстремумом. Если закон дрейфа известен, то может быть использована система программного управления. При неизвестном законе дрейфа обеспечить цель управления может только специальная система поиска экстремума.

Классическим примером системы такого типа является система автоподстройки частоты радиоприемника [19], амплитудная частотная характеристика которого имеет ярко выраженный экстремум (рис. 12.2).

Настройка радиоприемника предполагает поддержание максимума громкости звука или минимума искажений при изменяющихся условиях работы устройства.

Прежде чем говорить о синтезе системы поиска экстремума, необходимо формализовать техническую задачу создания регулятора.

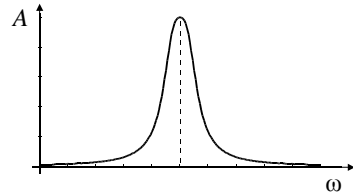


Рис. 12.2. Вид АЧХ радиоприемника

## 12.2. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Будем рассматривать задачу синтеза для объектов, описание которых включает в себя динамическую часть и статическую экстремальную характеристику (модель показателя качества). Обобщенная схема такого объекта управления показана на рис. 12.3.

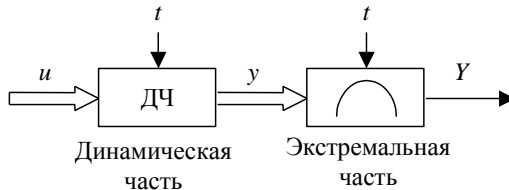


Рис. 12.3. Схематичное представление объекта управления

Математическая модель объекта имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u, & x \in R^n, u \in R^m, \\ y = g(x), & y \in R^m, m \leq n, \\ Y = Y(t, y), & Y \in R^1. \end{cases} \quad (12.1)$$

Здесь  $x$  – вектор состояния объекта;  $y$  – вектор выходных переменных динамической части объекта;  $Y(t, y)$  – выходная переменная

объекта, которая представляет собой нелинейную однозначную функцию и имеет экстремум по переменным  $y$ ;  $f(t, x)$  – вектор нелинейных функций, удовлетворяющих условиям существования и единственности решения;  $B(t, x)$  – матрица переменных коэффициентов;  $g(x)$  – вектор-функция, допускающая многократное дифференцирование.

Зависимость элементов функций  $f(\cdot)$  и  $B(\cdot)$  от времени отражает влияние действующих на объект возмущений, а зависимость  $Y$  от  $t$  – дрейф экстремума во времени.

Характер изменения параметров динамической части объекта  $f(t, x)$  и  $B(t, x)$  заранее неизвестен, кроме их граничных значений:

$$|f(\cdot)| \leq f_{\max}, \quad |B(\cdot)| \leq B_{\max}.$$

### 12.3. ТИПОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся модели статической экстремальной характеристики  $Y(t, y)$ .

1. Экстремальная характеристика типа «модуль» приведена на рис. 12.4. Она описывается уравнением  $Y = |y|$ .

В общем случае уравнение экстремальной характеристики типа «модуль» имеет вид

$$Y = k_1(t) |y - y_0(t)| + Y_0(t). \quad (12.2)$$

Уравнение (12.2) содержит параметры, отражающие изменение экстремальной характеристики во времени:  $k_1(t)$  – наклон ветвей характеристики;  $y_0(t)$  – горизонтальный дрейф экстремума;  $Y_0(t)$  – вертикальный дрейф экстремальной характеристики.

2. Экстремальная характеристика типа «парабола» изображена на рис. 12.5. В простейшем случае она описывается уравнением  $Y = y^2$ .



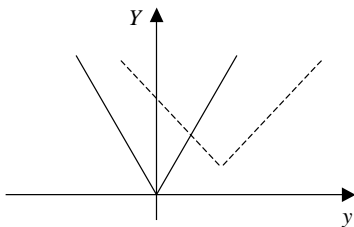


Рис. 12.4. Экстремальная характеристика типа «модуль»

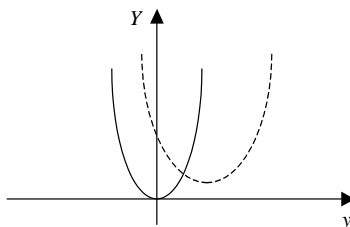


Рис. 12.5. Экстремальная характеристика типа «парабола»

В общем случае уравнение экстремальной характеристики типа «парабола» будет

$$Y = k_1(t) |y - y_0(t)|^2 + Y_0(t), \quad (12.3)$$

где  $k_1(t)$  также отражает наклон ветвей параболы;  $y_0(t)$  – горизонтальный дрейф экстремальной характеристики;  $Y_0(t)$  – вертикальный дрейф экстремума.

3. Экстремальная характеристика типа «парабола  $n$ -го порядка» описывается уравнением

$$Y = k_1(t) |y - y_0(t)|^n + k_2(t) |y - y_0(t)|^{n-1} + \dots \\ \dots + k_n(t) |y - y_0(t)| + Y_0(t),$$

где  $k_i(t)$  – коэффициенты, которые отражают наклон ветвей параболы,  $i = \overline{1, n}$ ;  $y_0(t)$  – горизонтальный дрейф экстремальной характеристики;  $Y_0(t)$  – вертикальный дрейф экстремума.

4. Матричное описание экстремальной характеристики:

$$Y = y^T D t y. \quad (12.4)$$

Зависимость элементов матрицы  $D(t)$  отражает изменение во времени параметров экстремальной характеристики.

## 12.4. УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Рассмотрим экстремальную характеристику произвольного вида

$$Y = Y(y), \quad Y \in R^1, \quad y \in R^n, \quad (12.5)$$

полагая для простоты, что отсутствует дрейф экстремума.

Как известно, необходимым условием экстремума является равенство нулю градиента, полученного для этой характеристики [37], т. е. выполнение условия

$$G = 0, \quad (12.6)$$

где  $G = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Y}{\partial y_m} \end{bmatrix}$  – градиент (вектор частных производных) выходной

переменной объекта.

Для того чтобы определить тип экстремума характеристики (12.5), можно задать небольшие приращения по переменным  $y$  относительно значения  $y_0$  в виде  $y_0 \pm \Delta y$  и исследовать полученные значения выхода  $Y$ . В случае, когда справедливы соотношения

$$\begin{cases} Y(y_0 + \Delta y) > Y_0(y_0), \\ Y(y_0 - \Delta y) > Y_0(y_0), \end{cases} \quad (12.7)$$

$Y_0$  представляет собой точку минимума.

Если значения выхода  $Y$  при небольших отклонениях от  $Y_0$  удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} Y(y_0 + \Delta y) < Y_0(y_0), \\ Y(y_0 - \Delta y) < Y_0(y_0), \end{cases} \quad (12.8)$$

то  $Y_0$  соответствует точке максимума характеристики (12.5).

## 12.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Цель экстремального управления состоит в обеспечении минимума или максимума заданной функции качества  $Y(t, y)$  при недостаточной априорной информации об объекте.

Задача синтеза экстремальной системы заключается в отыскании для объекта типа (12.1) такого управляющего воздействия  $u(\cdot)$ , которое позволяло бы автоматически определить положение экстремума и удерживать в нем систему. Формально это означает выполнение условия

$$\underset{y}{\text{extr}} Y(t, y) = Y_0, \quad (12.9)$$

где  $Y_0$  – экстремальное значение выходной характеристики.

Поскольку экстремальному значению  $Y_0$  соответствует определенное значение  $y_0$ , задачу синтеза можно переформулировать. Для экстремального объекта (12.1) необходимо определить управляющее воздействие  $u(\cdot)$ , которое обеспечит выполнение свойства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0. \quad (12.10)$$

Как видим, задача синтеза экстремальной системы сводится к задаче стабилизации в точке экстремума  $y_0$ , а для контроля за достижением этой точки следует использовать условия (12.6) – (12.8).

Таким образом, при синтезе экстремальных систем от алгоритма управления требуются организация движения в точку экстремума, если градиент выходной характеристики  $G$  не равен нулю, и удержание объекта в точке экстремума, если он равен нулю.

Анализ задачи синтеза экстремальных систем управления показывает, что в ней можно выделить три относительно самостоятельные подзадачи:

- задача оценки градиента;
- организация движения системы к точке экстремума в соответствии с условием  $G \rightarrow 0$ ;
- стабилизация системы в точке экстремума.

## 12.6. СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ГРАДИЕНТА

Задача непрерывной оценки градиента представляет собой самостоятельную и очень непростую техническую проблему. К настоящему времени разработаны различные способы оценки градиента [1, 6, 19, 32, 37, 40, 44]. Обсудим некоторые из них.

### 12.6.1. СПОСОБ ДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим суть данного способа на примере одноканальных объектов со статической экстремальной характеристикой

$$Y = Y(y, t), \quad y \in R^1. \quad (12.11)$$

Определим полную производную выходной переменной по времени

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial Y}{\partial t}. \quad (12.12)$$

Второе слагаемое в выражении (12.12) обусловлено наличием дрейфа. При медленном дрейфе экстремальной характеристики им можно пренебречь, так как  $\partial Y / \partial t = 0$ . В этом случае из выражения (12.12) можно определить величину градиента как отношение двух полных производных по времени:

$$G \cong \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\dot{Y}}{\dot{y}}. \quad (12.13)$$

Структурная схема устройства, реализующего оценку градиента способом деления производных, представлена на рис. 12.6.

Поскольку операция дифференцирования на практике очень критична к помехам, для оценки производных следует использовать дифференцирующие фильтры ДФ (на рис. 12.6 они показаны пунктиром).

*Достоинством* данного способа является простота технической реализации.

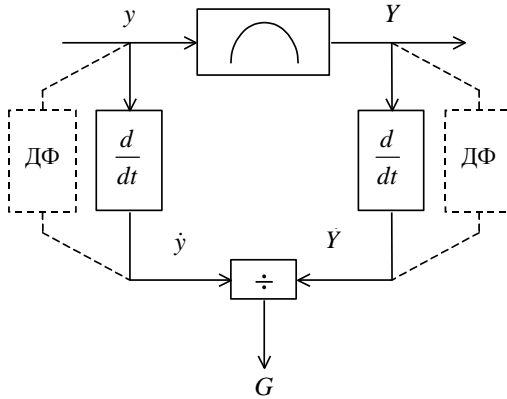


Рис. 12.6. Структурная схема устройства оценки градиента способом деления производных

*Недостатки* – сложность оценки градиента при малых значениях  $\dot{y}$  (как следует из выражения (12.13)) и соответственно слабая помехозащищенность. Для уменьшения влияния помехи рекомендуется использовать дифференцирующие фильтры выше первого порядка (см. главу 11).

### 12.6.2. СПОСОБ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Данный способ оценки градиента рассмотрим также для одноканальных объектов со статической экстремальной характеристикой (12.11). При этом в отличие от предыдущего способа производные  $\dot{Y}$  и  $\dot{y}$  приближенно заменяются конечными разностями

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T}, \\ \dot{Y} = \frac{dY}{dt} \approx \frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{Y(k) - Y(k-1)}{T}, \end{cases}$$

где  $k$  – дискретный момент времени;  $T$  – шаг квантования (дискретизации) по времени.

В основе способа лежит соотношение

$$G = \frac{\partial Y}{\partial y} \cong \frac{\Delta Y}{\Delta y} = \frac{Y(k) - Y(k-1)}{y(k) - y(k-1)}. \quad (12.14)$$

Структурная схема устройства, реализующего дискретную оценку градиента, показана на рис. 12.7, на котором  $z^{-1}$  – звено задержки на один шаг квантования.

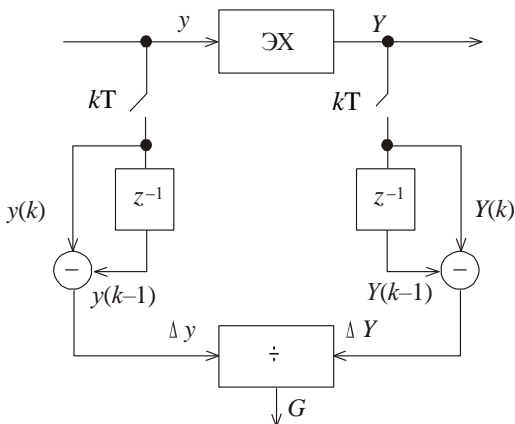


Рис. 12.7. Структурная схема устройства оценки градиента способом конечных разностей

*Достоинство* данного метода заключается в высокой помехозащищенности, так как фильтрующие свойства обусловлены усреднением переменных на интервале дискретизации.

### 12.6.3. ОЦЕНКА ЗНАКА ГРАДИЕНТА

В некоторых случаях для организации движения к экстремуму достаточно оценивать только знак градиента, т. е. определять функцию  $\text{sgn } G$ , которую можно представить следующим образом:

$$\text{sgn } G = \frac{G}{|G|}, \quad (12.15)$$

или после несложных преобразований

$$\operatorname{sgn} G = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{\left| \frac{\partial Y}{\partial y} \right|} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{\left| \frac{\partial Y}{\partial y} \right|} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{\left| \frac{\partial Y}{\partial y} \right|} = \frac{\operatorname{sgn} \partial Y}{\operatorname{sgn} \partial y}. \quad (12.16)$$

Предполагая, что шаг квантования  $T$  достаточно мал, заменим в выражении (12.16) дифференциалы конечными разностями

$$\partial Y \cong \Delta Y = Y(k) - Y(k-1),$$

$$\partial y \cong \Delta y = y(k) - y(k-1).$$

Это позволяет представить соотношение (12.16) в виде

$$\operatorname{sgn} G \cong \frac{\operatorname{sgn} \Delta Y}{\operatorname{sgn} \Delta y} = \operatorname{sgn} \Delta Y \operatorname{sgn} \Delta y, \quad (12.17)$$

которое и используется для оценки знака градиента как аппаратным, так и программным способом.

#### 12.6.4. СПОСОБ СИНХРОННОГО ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

В основе этого способа лежит идея синхронного детектора, который используется в радиотехнике для выделения на фоне основного сигнала дополнительной составляющей [22].

Способ синхронного детектирования (рис. 12.8) предполагает добавление к основному сигналу на входе экстремальной характеристики у дополнительного поискового синусоидального сигнала малой амплитуды и высокой частоты  $\Delta y = A \sin \omega t$  с последующим выделением соответствующей составляющей из выходного сигнала  $Y$ .

На рис. 12.8 ГСК – генератор синусоидальных колебаний; ФЧУ – фазочувствительное устройство; Ф – усредняющий фильтр.

Сравнение фаз входного и выходного периодических сигналов позволяет сделать вывод о том, движется ли система к экстремуму или удаляется от него, т. е. получить оценку знака градиента. Введение в систему специального усредняющего фильтра дает возможность оценить и его значения.

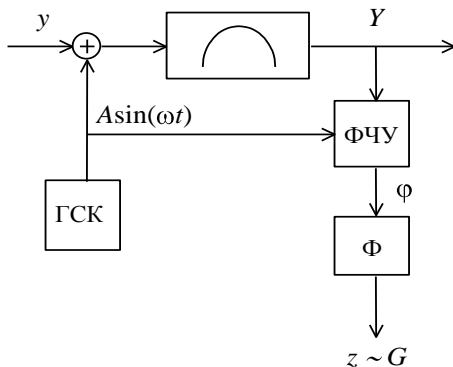


Рис. 12.8 Схема оценки градиента способом синхронного детектирования

Работу способа синхронного детектирования иллюстрирует рис. 12.9.

Наличие колебаний на входе приводит к появлению колебаний такой же частоты на выходе, причем при прохождении экстремума колебания на выходе изменяют фазу на  $180^\circ$ .

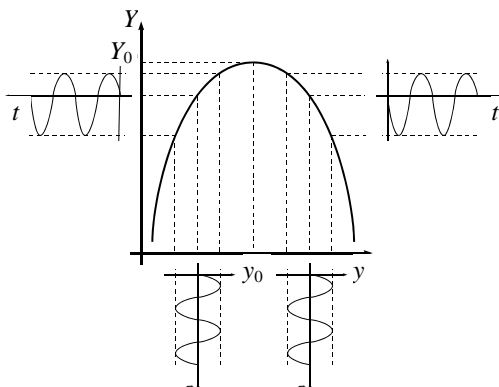


Рис. 12.9. Диаграмма, иллюстрирующая изменение фазы периодического поискового сигнала при переходе через экстремум



Для сравнения сигналов со входа и выхода экстремального объекта используется специальное фазочувствительное устройство. Если входной и выходной сигналы имеют одну и ту же фазу, то на его выходе появляется положительный сигнал, в противном случае – отрицательный. Этот сигнал, пройдя через специальный усредняющий фильтр, будет пропорционален частной производной  $G$ .

В качестве ФЧУ может быть использован блок умножения, имеющий два входа (рис. 12.10).

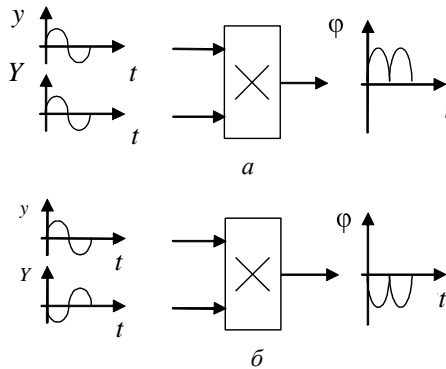


Рис. 12.10. Графики, иллюстрирующие работу ФЧУ на базе блока умножения:

*а* – входной и выходной поисковый сигналы в фазе;  
*б* – в противофазе

Покажем теперь аналитически, что способ синхронного детектирования позволяет получить оценку частной производной.

При малой амплитуде поискового сигнала можно считать, что статическая экстремальная характеристика в малой окрестности рабочей точки  $y_*$  линейна (рис. 12.11), поэтому заменим ее касательной. В этом случае уравнение статической экстремальной характеристики принимает вид

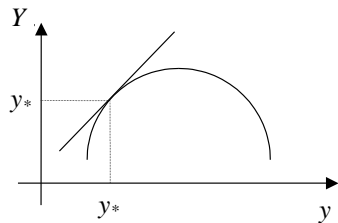


Рис. 12.11. Линейризация статической экстремальной характеристики в рабочей точке

$$Y = Y_* + k(y - y_*), \quad (12.18)$$

где  $k$  – тангенс угла наклона касательной, который определяется соотношением

$$k = \frac{\partial Y}{\partial y}. \quad (12.19)$$

Таким образом,  $k = G$ . В дальнейшем используем это обозначение.

Сигнал на входе экстремального объекта представляет собой сумму

$$y = y_* + A \sin \omega t. \quad (12.20)$$

Для простоты будем полагать, что  $y_* = 0$  (преобразования не изменятся и в общем случае, но станут более громоздкими). Выражение (12.18) с учетом (12.19) и (12.20) принимает вид

$$Y = Y_* + GA \sin \omega t. \quad (12.21)$$

Запишем теперь выражение для сигнала на выходе ФЧУ:

$$\varphi = YA \sin \omega t \quad (12.22)$$

или с учетом (12.21)

$$\varphi = Y_* A \sin \omega t + GA^2 \sin^2 \omega t. \quad (12.23)$$

Так как усредняющий фильтр усредняет сигналы на периоде, то на его выходе получим

$$z = \int_0^{2\pi} \varphi \omega t \, d\omega t = \int_0^{2\pi} Y_* A \sin \omega t + GA^2 \sin^2 \omega t \, d\omega t. \quad (12.24)$$

Представив в (12.24) интеграл суммы в виде суммы интегралов, запишем

$$z = Y_* A \int_0^{2\pi} \sin \omega t \, d\omega t + GA^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t \, d\omega t. \quad (12.25)$$

Первый интеграл в выражении (12.25) на периоде будет равен нулю, а во втором  $\sin^2 \omega t$  выразим через косинус двойного угла:

$$z = GA^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} d\omega t.$$

Полученное выражение преобразуем к виду

$$z = \frac{GA^2}{2} \int_0^{2\pi} d\omega t - \frac{GA^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\omega t d\omega t. \quad (12.26)$$

Поскольку интеграл  $\cos 2\omega t$  на периоде равен нулю, на выходе фильтра получим сигнал, пропорциональный градиенту

$$z = \pi A^2 G. \quad (12.27)$$

Метод синхронного детектирования работает устойчиво, хорошо защищен от помех и часто применяется в реальных системах поиска экстремума.

Аналогичный подход можно использовать и для оценки градиента в многоканальных системах. С этой целью к каждому значению выходной переменной динамической части объекта  $y_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) добавляется свой поисковый сигнал определенной частоты и амплитуды ( $\omega_j, A_j$ ). В систему необходимо добавить соответствующее число полосовых фильтров, каждый из которых будет выделять свою составляющую выходного сигнала  $Y$ . Наличие  $m$  усредняющих фильтров позволяет получить отдельные компоненты вектора  $G$ .

### 12.6.5. ОЦЕНКА ГРАДИЕНТА С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Оригинальный способ оценки градиента разработан на кафедре автоматики НГТУ (рис. 12.12).

Покажем, что данное устройство действительно позволяет оценивать частную производную. С этой целью для промежуточной переменной  $z$  запишем соотношение

$$z = \frac{1}{T} (Y - \hat{Y}), \quad (12.28)$$

где  $\hat{Y}$  – оценка выходной переменной экстремального объекта;  $T$  – постоянная времени фильтра.

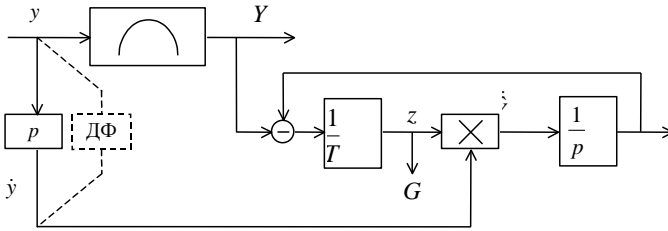


Рис. 12.12. Структурная схема фильтра оценки градиента

Дифференцируя по времени соотношение (12.28), получим уравнение динамики фильтра оценки градиента относительно переменной  $z$ :

$$\dot{z} = \frac{1}{T} \dot{Y} - \dot{\hat{Y}}. \quad (12.29)$$

Учитывая, что  $\dot{\hat{Y}} = z\dot{y}$ , представим (12.29) в виде

$$T\dot{z} = \dot{Y} - z\dot{y}. \quad (12.30)$$

При достаточно малом значении постоянной времени ( $T \rightarrow 0$ ) уравнение (12.30) вырождается в соотношение

$$\dot{Y} = z\dot{y}, \quad (12.31)$$

из которого следует

$$z = \frac{\dot{Y}}{\dot{y}} = \frac{\partial Y}{\partial y} = G. \quad (12.32)$$

Таким образом, предложенное устройство действительно позволяет оценивать частную производную, причем точность оценки будет тем выше, чем меньше параметр  $T$ .

На практике необходимую для оценки градиента производную  $\dot{y}$  рекомендуется определять с помощью дифференцирующего фильтра (на рис. 12.12 показан пунктиром), имеющего малую постоянную времени.

## 12.7. ОРГАНИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ К ЭКСТРЕМУМУ

Организация движения к экстремуму в автоматической системе основана на контроле градиента и использовании его в законе управления. Такие системы называются градиентными экстремальными системами (рис. 12.13). Существующие способы их построения используют как оценку значения градиента (системы с управлением по градиенту) [32, 37], так и оценку знака компонент градиента (системы с запоминанием экстремума, отдельные типы шаговых систем).

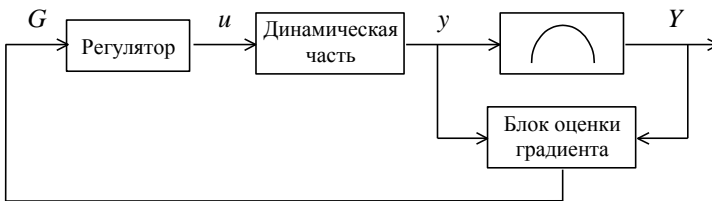


Рис. 12.13. Обобщенная функциональная схема градиентной экстремальной системы

### 12.7.1. ГРАДИЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим организацию движения к экстремуму на примере простейшего объекта управления, который описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ y = x, \\ Y = Y(y). \end{cases} \quad (12.33)$$

Сформируем пропорциональный градиенту закон управления в виде

$$u = kG(y, t). \quad (12.34)$$

Подставив (12.34) в уравнение объекта (12.33), получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{y} = kG(y, t), \quad (12.35)$$

которое представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение относительно переменной  $y$ . Полагая  $\dot{y} = 0$ , запишем уравнение статики

$$kG(y, t) = 0, \quad (12.36)$$

где зависимость  $G$  от  $t$  параметрическая. Поскольку  $k \neq 0$ , из выражения (12.36) следует

$$G(y, t) = 0. \quad (12.37)$$

Таким образом, в случае устойчивости замкнутой системы процессы в ней будут сходиться к точке равновесия, которая является точкой экстремума. Устойчивость движения в замкнутой системе можно обеспечить соответствующим выбором коэффициента усиления  $k$ , при этом выход на экстремум происходит автоматически. В некоторых случаях с помощью коэффициента  $k$  кроме устойчивости можно обеспечить определенную длительность переходного процесса в замкнутой системе, т. е. заданное время выхода на экстремум.

#### ПРИМЕР 12.1

Для объекта, математическая модель которого имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = 2u, \\ Y = y^2, \end{cases}$$

необходимо обеспечить выход на экстремум за заданное время  $t_n \leq 3$  с.

В соответствии с (12.34) сформируем управление

$$u = kG(y).$$

Так как известна модель статической экстремальной характеристики, градиент можно определить аналитически, т. е.

$$G = \frac{\partial Y}{\partial y} = 2y,$$

и организовать алгоритм управления

$$u = 2ky.$$

В этом случае получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{y} = 4ky.$$

Как видим, она имеет первый порядок, и для ее устойчивости корень характеристического уравнения  $p_1 = 4k$  должен быть отрицательным. Следовательно, необходимо выбирать коэффициент

$$k < 0.$$

Численное значение  $k$  определим, используя корневые оценки переходного процесса. Так как  $\eta \approx 3/t_n^*$ , то получим  $|k| \geq 0,25$ . Если выбрать  $|k| = 0,3$ , то алгоритм управления, обеспечивающий выполнение заданных требований, примет вид

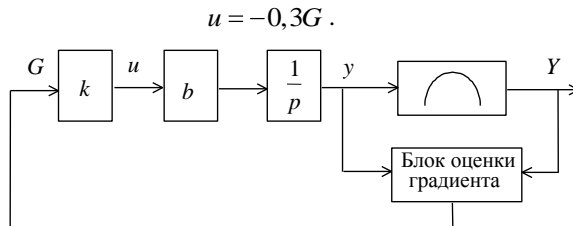


Рис. 12.14. Структурная схема системы для примера 12.1

Структурная схема системы с рассчитанным законом управления представлена на рис. 12.14.

## 12.7.2. МЕТОД «ТЯЖЕЛОГО ШАРИКА»

Рассмотренный в разд. 12.7.1 метод позволяет автоматически найти экстремум, в окрестности которого заданы начальные условия. Если экстремальная характеристика помимо глобального имеет также и несколько локальных экстремумов, то система может «остановиться» в любом из них.

По аналогии с тяжелым шариком, который скатывается в овраг, проскакивая локальные экстремумы, данный метод предполагает введение в систему дополнительной инерционности для придания процессам свойства «проскакивать» точки локальных экстремумов.

Будем рассматривать объект, поведение которого описывают уравнения (12.33). Чтобы обеспечить колебательные переходные процессы в системе, добавим в обратную связь аperiодическое звено с постоянной времени  $T$ , которую и определим в результате синтеза (рис. 12.15).

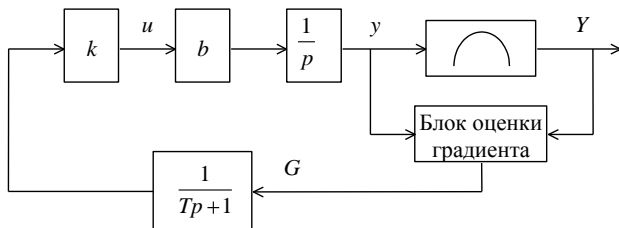


Рис. 12.15. Структурная схема системы с дополнительной инерционностью

Запишем операторное уравнение замкнутой системы, предполагая, что с помощью соответствующего блока градиент можно оценить точно, т. е.

$$y = \frac{bk}{p(Tp+1)} G, \quad (12.38)$$

где  $G = \partial Y / \partial y = 2y$ , так как экстремальная характеристика описывается уравнением  $Y = y^2$ .

Преобразуем уравнение (12.38) :

$$p(Tp+1)y = 2bky,$$

которое затем представим в стандартной форме:

$$(Tp^2 + p - 2bky) = 0. \quad (12.39)$$

Отсюда следует, что, выбирая  $(-bk) > 0$ , можно обеспечить устойчивость системы (12.39), уравнение статики которой имеет вид

$$-2bky^0 = 0. \quad (12.40)$$

Таким образом, точка равновесия  $y^0 = 0$  эквивалентна точке экстремума, так как при этом  $G = 0$ .

Характер движения системы к точке экстремума определяется характеристическим уравнением

$$Tp^2 + p - 2bk = 0. \quad (12.41)$$



Выбирая распределение корней из условия обеспечения требуемых показателей качества процесса выхода на экстремум ( $t_n^*$  и  $\sigma^*$ ), сформируем желаемое характеристическое уравнение второго порядка. Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях оператора  $p$  этих двух уравнений (согласно методике модального метода синтеза), можно определить требуемые численные значения  $k$  и  $T$ .

### 12.7.3. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА

Обсудим теперь задачу синтеза для объектов управления произвольного порядка, которые описываются нелинейным нестационарным дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) + b(t, y, \dots, y^{(n-1)}) u; \quad Y = Y(t, y). \quad (12.42)$$

Предполагается, что дрейф экстремума медленный, т. е.  $dY/dt \approx 0$ . В этом случае градиент определяется соотношением

$$G = \frac{\partial Y}{\partial y} = G(y).$$

Сформируем снова пропорциональный градиенту закон управления

$$u = kG(y) \quad (12.43)$$

и исследуем поведение замкнутой системы

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}) + b(t, y, \dots, y^{(n-1)}) kG(y). \quad (12.44)$$

Обеспечить устойчивость замкнутой системы можно соответствующим выбором коэффициента усиления  $k$ . Так как система (12.44) нелинейная, то для анализа устойчивости можно использовать второй метод Ляпунова, на основе которого определяется коэффициент  $k$ . Поскольку второй метод Ляпунова дает лишь достаточное условие устойчивости, выбранная функция Ляпунова может оказаться неудачной, поэтому регулярную процедуру расчета регулятора здесь предложить нельзя.

### 12.7.4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Данный способ синтеза экстремальной системы предполагает использование в законе управления действительной и желаемой старшей производных выходной переменной динамической части системы аналогично способу управления нелинейными нестационарными объектами (см. главу 10).

Рассмотрим возможности метода применительно к объекту управления (12.42), описание которого представим в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u, & x \in R^n, u \in R^1, \\ y = g(x), & y \in R^1, Y \in R^1, \\ Y = Y(y, t). \end{cases} \quad (12.45)$$

Здесь предполагаем, что функция  $g(x)$  допускает многократное дифференцирование, а дрейф экстремума достаточно медленный.

Цель управления заключается в определении такого управляющего воздействия  $u = u(\cdot)$ , которое обеспечивает выполнение условия (12.10)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$$

с заданной точностью  $|\Delta^0| \leq \Delta_*^0$ .

Наряду с условием статики предъявляются требования и к динамике, т. е. к характеру переходных процессов, в виде оценок

$$t_n \leq t_n^* \text{ и } \sigma \leq \sigma^*.$$

Для формирования алгоритма управления необходимо предварительно определить производную выходных переменных динамической части объекта, которая непосредственно зависит от управления. При этом обозначим через  $C$  вектор-строку производных  $C = \partial g / \partial x^T$ .

Исследуем ситуацию, когда

$$CB(\cdot) \neq 0. \quad (12.46)$$

В этом случае от управляющего воздействия будет явно зависеть первая производная выходных переменных динамической части объекта

$$\dot{y} = C\dot{x} = Cf(t, x) + CB(t, x)u, \quad (12.47)$$

поэтому требования к поведению замкнутой системы следует формировать относительно нее в виде желаемого дифференциального уравнения [8]

$$\dot{y} = F(G) = -\alpha G(y), \quad (12.48)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, который выбирается из условия требуемого времени выхода на экстремум. Причем для большого класса объектов типа (12.45) желаемое дифференциальное уравнение можно конструировать в классе линейных уравнений, формируя распределение корней аналогично модальному методу синтеза.

В статике желаемое уравнение (12.48) вырождается в условие

$$G(y) = 0,$$

что соответствует точке экстремума.

Зададим закон управления на основе метода локализации в виде

$$u = k(F - \dot{y}), \quad (12.49)$$

где  $k$  – коэффициент усиления регулятора.

Использование  $\dot{y}$  в алгоритме управления (12.49) позволяет подавать влияние динамической части объекта и действующих на него возмущений, а наличие градиента – организовать движение к точке экстремума, соответствующей точке равновесия замкнутой системы.

Подставив (12.49) в (12.47), получим уравнение динамики для выходной переменной ДЧ

$$\dot{y} = Cf(t, x) + CB(t, x)k(F - \dot{y}), \quad (12.50)$$

которое преобразуется к виду

$$(1 + CBk)\dot{y} = Cf + CBkF.$$

При условии, что  $(1 + CBk) \neq 0$ , получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{y} = (1 + CBk)^{-1}Cf + (1 + CBk)^{-1}CBkF. \quad (12.51)$$

Начиная с некоторых значений коэффициента  $k$  выполняется условие  $CBk \gg 1$ , и уравнение (12.51) при условии, что  $(CBk) \neq 0$ , вырождается в следующее:

$$\dot{y} \cong (CBk)^{-1}Cf + (CBk)^{-1}CBkF. \quad (12.52)$$

Пренебрегая первым слагаемым в уравнении (12.52) при  $k \rightarrow \infty$ , запишем его в виде

$$\dot{y} \cong F(G) = -\alpha G(y).$$

Таким образом, соответствующий выбор коэффициента усиления регулятора позволяет с заданной точностью обеспечить в замкнутой системе желаемую динамику выхода на экстремум. Параметры регулятора выбираются из соотношения

$$CBk = 20 \dots 100. \quad (12.53)$$

В этом случае ошибка поддержания в системе желаемого уравнения не будет превышать (1...5) %. Структурная схема системы приведена на рис. 12.16.

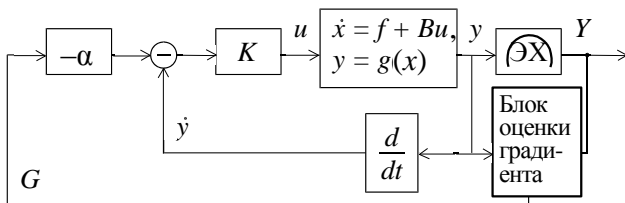


Рис. 12.16. Расчетная схема системы со старшей производной в управлении

В реальной системе для оценки полной производной по времени используется дифференцирующий фильтр, поэтому оценивать градиент удобно с помощью специального фильтра, который будем называть **фильтром оценки частной производной**.

Следует отметить, что использование в системе фильтров с малыми инерционностями может приводить к возникновению в ней разнотемповых процессов, для исследования свойств которых необходимо применять метод разделения движений (см. разд. 10.5).

### ПРИМЕР 12.2

Рассчитать систему поиска экстремума для объекта управления, поведение которого описывают уравнения

$$\begin{cases} T_0 \dot{y} + y = k_0(t)u, \\ Y = ay^2, \end{cases}$$

где  $T_0 = 2$  с,  $1 \leq k_0(t) \leq 5$ ,  $a = 2$ ,  $y(0) = 1$ . Необходимо обеспечить выход на экстремум за время  $t_n \approx 5$  с.

На основании требований к динамике процесса определим желаемый полюс замкнутой системы ( $\lambda^* = -1$ ) и сформируем желаемое уравнение того же порядка, что и уравнение объекта

$$\dot{y} = -y \text{ или } \dot{y} = -\alpha G,$$

где  $\alpha = 0,25$ . Коэффициент усиления регулятора  $K$  выбираем из условия  $CB_{\min} K = 20$ . В данном случае  $C = 1$ ,  $B(t) = k_0(t)/T_0$ ,  $0,5 \leq B(t) \leq 2,5$ . Следовательно,  $K = 40$ .

Для оценки производных используем дифференцирующий фильтр первого порядка (см. главу 11) с постоянной времени  $\mu_1 = 0,01$  с и фильтр оценки частной производной с постоянной времени  $\mu_2 = 0,1$  с (рис. 12.17).

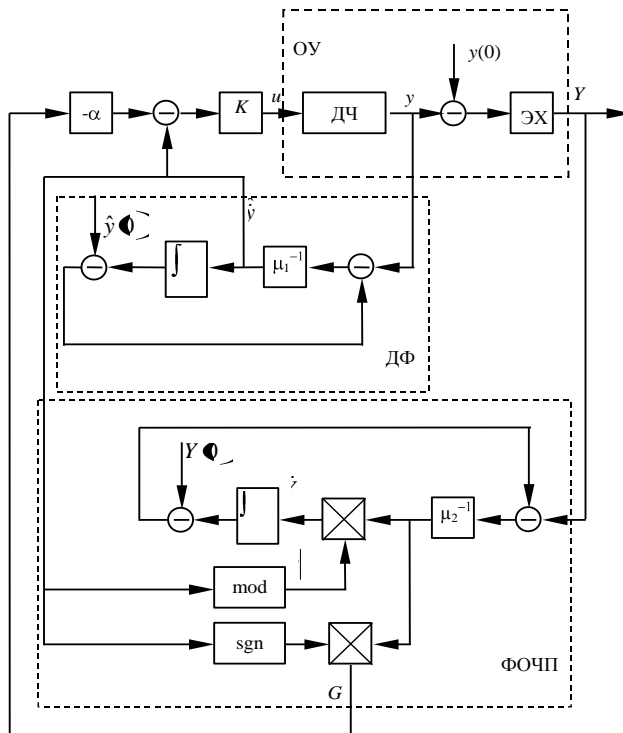


Рис. 12.17. Структурная схема системы к примеру 12.2

На рис. 12.17 ДЧ – динамическая часть объекта; ЭХ – экстремальная характеристика; ДФ – дифференцирующий фильтр; ФОЧП – фильтр оценки частной производной. Блок  $\text{mod}$  реализует операцию получения модуля оценки производной  $\hat{y}$ , а блок  $\text{sgn}$  – ее знака. Эти блоки введены для обеспечения устойчивости замкнутой системы.

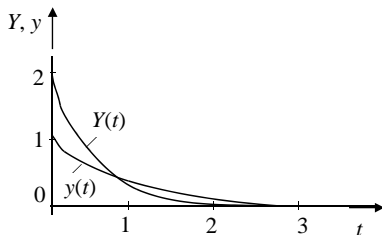


Рис. 12.18. Переходные процессы в замкнутой системе

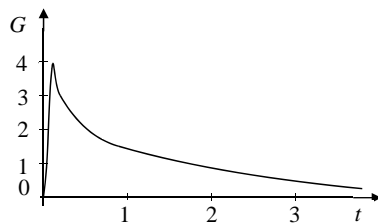


Рис. 12.19. Изменение оценки градиента в системе

На рис. 12.18 и 12.19 отображены переходные процессы в системе и изменение оценки градиента при согласованных параметрах дифференцирующего фильтра и фильтра оценки частной производной соответственно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в этой главе способы организации систем автоматического поиска экстремума являются основными способами синтеза, которые регулярно используются в настоящее время. Здесь представлены как известные подходы (пропорциональный градиенту закон управления), так и оригинальные разработки авторов (метод локализации). Наряду с ними в литературе можно найти множество специальных приемов, которые помогают в частных ситуациях находить удовлетворительные решения.

Для организации движения к экстремуму используется информация о величине или знаке градиента, оценивать который на практике значительно сложнее, чем полную производную по времени. Мы обсудили основные подходы к решению данной задачи, включая специальный фильтр оценки частной производной.

Использование метода локализации в совокупности с этим фильтром позволяет синтезировать экстремальные системы с требуемым качеством процесса для широкого класса объектов с нелинейной динамической частью и дрейфующим экстремумом.

Общей технической трудностью для систем автоматического поиска экстремума является качество измерения показателя  $Y(t)$  и переменных  $y(t)$ . Это обстоятельство прежде всего следует учитывать при выборе или проектировании системы датчиков.

## З А Д А Ч И

**12.1.** Структурная схема объекта показана на рис. 12.20. Рассчитать систему поиска экстремума в предположении, что градиент можно оценить точно.

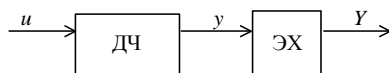


Рис. 12.20. Структурная схема объекта  
к задаче 12.1

Модели динамической части и экстремальной характеристики имеют вид  $W_0(p) = 5/(2p+1)$ ,  $Y = 0,2y^2$ . Необходимо обеспечить время выхода на экстремум  $t_n \leq 6$  с.

**12.2.** Модель объекта имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = -5y + 8u, \\ Y = 2y^2. \end{cases}$$

Рассчитать градиентную систему с точной оценкой  $G$ , обеспечивающую выход на экстремум за время  $t_n \leq 2$  с.

**12.3.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - 3x_2 + 10u, \\ y = x_1, \\ Y = 0,25y^2. \end{cases}$$

Рассчитать градиентную систему с точной оценкой  $G$ , если требования к процессу выхода на экстремум следующие:  $t_n \leq 1$  с,  $\sigma \leq 30\%$ .

**12.4.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{y} = -2y + 5u, \\ Y = 0,5y^2 + 4. \end{cases}$$

Рассчитать градиентную систему с точной оценкой  $G$ , обеспечивающую выход на экстремум за время  $t_n \leq 3$  с.

**12.5.** Модель объекта имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = y + 2u, \\ Y = 0,4y^2. \end{cases}$$

Рассчитать автоматическую систему с учетом метода «тяжелого шарика» и точной оценки  $G$ , обеспечивающую выход на экстремум за время  $t_n \leq 2$  с.

**12.6.** Структурная схема объекта представлена на рис. 12.20. Рассчитать систему поиска экстремума с производной в управлении и точной оценкой  $G$ , обеспечивающую время выхода на экстремум  $t_n \leq 0,3$  с. Описание динамической части и экстремальной характеристики имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^3 + 0,5u, \\ Y = 4y^2. \end{cases}$$

**12.7.** Для объекта, структурная схема которого показана на рис. 12.20, рассчитать систему поиска экстремума с производной в управлении и точной оценкой  $G$ . Описание динамической части и экстремальной характеристики имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + b(t)u, & 0,3 \leq b(t) \leq 1, \\ y = 2x_1 + x_2, \\ Y = 5y^2. \end{cases}$$



Качество процесса выхода на экстремум должно удовлетворять требованиям:  $t_n \leq 3$  с,  $\sigma = 0$ .

**12.8.** Структурная схема объекта представлена на рис. 12.20. Рассчитать систему поиска экстремума в предположении, что модели динамической части и экстремальной характеристики имеют вид  $W_0(p) = 15/0,4p + 1$ ,  $Y = 2,5y^2$ . Необходимо оценить  $G$  способом деления производных и обеспечить время выхода на экстремум  $t_n \leq 5$  с.

**12.9.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{y} = -0,5y + 2u, \\ Y = y^2 + 1, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

Рассчитать градиентную систему, обеспечивающую выход на экстремум за время  $t_n \leq 2$  с. Для оценки  $G$  использовать метод конечных разностей.

**12.10.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{y} = -4y + 12u, \\ Y = 0,5y^2, \quad y(0) = 5. \end{cases}$$

Рассчитать градиентную систему, обеспечивающую выход на экстремум за время  $t_n \leq 2$  с. Для оценки  $G$  использовать метод синхронного детектирования.

**12.11.** Структурная схема объекта представлена на рис. 12.20. Рассчитать систему поиска экстремума в предположении, что модели динамической части и экстремальной характеристики имеют вид  $W_0(p) = 6/0,25p^2 + 0,5p + 1$ ,  $Y = 2y^2$ ,  $y(0) = 3$ . Необходимо оценить  $G$  методом синхронного детектирования и обеспечить качество процесса выхода на экстремум:  $t_n \leq 5$  с,  $\delta \leq 5\%$ .

**12.12.** Структурная схема объекта показана на рис. 12.20. Рассчитать систему поиска экстремума с производной в управлении и реальной оценкой  $G$ , обеспечивающую время выхода на экстремум  $t_n \leq 3$  с. Описание динамической части и экстремальной характеристики имеет вид

G

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 5u, \\ y = c(t)x_1 + x_2, \quad 3 \leq c(t) \leq 7, \\ Y = y^2. \end{cases}$$

**12.13.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a(t)x_1 - x_2 + 10u, \\ y = x_1 + x_2, \quad 5 \leq a(t) \leq 12, \\ Y = 5y^2. \end{cases}$$

Рассчитать систему поиска экстремума с производной в управлении и реальной оценкой  $G$ , обеспечивающую время выхода на экстремум  $t_n \leq 2$  с.

**12.14.** Поведение объекта описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad |x_1| \leq 20, \quad |x_2| \leq 50, \\ \dot{x}_2 = -0,5x_1 - x_2 + 2u, \quad |u| \leq 200, \\ y = x_1 - c(t)x_2, \quad 1 \leq c(t) \leq 5, \\ Y = 5y^2, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Рассчитать систему поиска экстремума с производной в управлении и реальной оценкой  $G$ , обеспечивающую следующее качество процесса выхода на экстремум:  $t_n \leq 1$  с,  $\sigma = 0$ .

---

---

## Глава 13

# ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

---

---

**П**еред разработчиком системы управления всегда стоит задача формирования в ней наилучших в каком-либо смысле переходных процессов. Чаще всего возникает необходимость обеспечения максимального быстродействия исполнительных механизмов или минимальных затрат энергии на совершение переходных процессов. При этом, естественно, ограничены какие-то внутренние переменные объекта или оговорены дополнительные условия работы. Например, при оптимизации быстродействия системы ограничены, как правило, управляющие воздействия; при оптимизации затрат энергии ограничена длительность переходных процессов. Таким образом, искусство инженера-проектировщика состоит в максимальном удовлетворении заданных требований при известных ресурсных ограничениях.

С развитием техники и теории автоматического управления предъявляемые к системам требования становились все более жесткими, что привело к разработке соответствующих способов проектирования. В 50-х годах XX века появились математические методы оптимизации переходных процессов: метод динамического программирования Р. Беллмана и принцип максимума Л.С. Понтрягина, которые и будут представлены в данной главе. Ниже рассмотрены основы этих методов и методики проектирования автоматических систем с их применением.

### 13.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Оптимальной** называют такую **систему** автоматического управления, в которой полностью в каком-либо формальном смысле используются динамические возможности объекта для совершения переходных процессов при заданных ресурсных ограничениях.

**Управление**, обеспечивающее в системе оптимальные процессы, называется **оптимальным** и обозначается далее  $u^0$ .

Покажем особенности задачи синтеза оптимальной системы на следующем примере.

### ПРИМЕР 13.1

Для объекта, структурная схема которого показана на рис. 13.1, рассчитать регулятор, обеспечивающий переход из начального положения  $y(0)$  в заданное конечное состояние  $y_*(t)$  за минимально возможное время. Рекурс управления объекта ограничен  $|u| \leq \bar{U}$ , а  $k = 1$ .

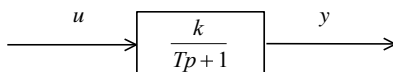


Рис. 13.1. Схема объекта управления к примеру 13.1

Рассмотрим переходные процессы при подаче на вход объекта различных управляющих воздействий (рис. 13.2):

1) если подать управление  $U = kU_*$ , численно равное  $y_*$ , то переходные процессы в объекте завершатся за время  $t_n$  (кривая 1 на рис. 13.2);

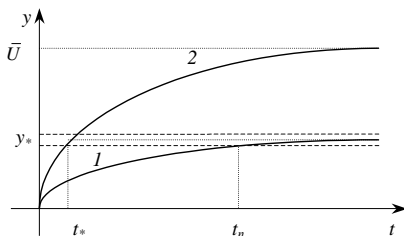


Рис. 13.2. Переходные процессы объекта управления

2) при подаче на объект максимально возможного управления  $\bar{U}$  на его выходе получим процесс, соответствующий кривой 2, причем в момент времени  $t_*$  значение выходной переменной будет равно  $y_*$ ;

3) если сначала подать максимально возможное управление  $\bar{U}$ , а в момент времени  $t_*$  сформировать  $u = kU_*$ , то процесс перехода в требуемое состояние будет заканчиваться за минимально возможное для объекта время при заданном ограничении на управление.

Реализовать на практике описанный алгоритм управления можно двумя способами.

1. В виде программного закона управления

$$u^0(t) = \begin{cases} \bar{U}, & t \leq t_*, \\ kU_*, & t > t_*. \end{cases}$$

В этом случае оптимальная система будет разомкнутой и, следовательно, не позволит обеспечить требуемые свойства при действии на объект внешних возмущений.

2. В виде обратной связи

$$u^0(t) = \begin{cases} \bar{U}, & y < y_*, \\ kU_*, & y \geq y_*. \end{cases}$$

Структурная схема замкнутой системы с подобным законом управления показана на рис. 13.3.

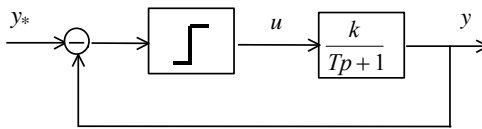


Рис. 13.3. Структурная схема оптимальной системы к примеру 13.1

Обращаем внимание на то, что полученная релейная система обеспечит оптимизацию переходных процессов при любых параметрах объекта и даже при действии возмущений. Это тот редкий в технике случай, когда алгоритм оптимального управления инвариантен по отношению к возмущениям и нестационарности параметров объекта.

Рассмотренный пример иллюстрирует основные свойства оптимальных систем: объект работает на пределе своих возможностей (полное использование ресурса  $\bar{U}$ ), управление имеет релейный характер.

## 13.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

### 13.2.1. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Постановка задачи синтеза оптимальных систем предполагает строгую формализацию всех этапов [1, 17, 21], начиная с описания объекта управления, которое следует представить в переменных состояния. Причем объект должен быть стационарным (параметры не могут изменяться с течением времени), т. е. в общем случае его модель имеет вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad m \leq n. \quad (13.1)$$

Здесь  $x$  – вектор состояния объекта;  $f(x, u)$  – вектор нелинейных функций, удовлетворяющих условию существования и единственности решения дифференциального уравнения.

В частном случае объект может быть описан нелинейным стационарным уравнением состояния с аддитивным управлением

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (13.2)$$

где  $B(x)$  – матрица нелинейных функций.

В классе объектов с аддитивным управлением можно выделить подкласс линейных объектов, модель которых имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (13.3)$$

Здесь  $A$  и  $B$  – матрицы коэффициентов соответствующих размерностей.

### 13.2.2. ОПИСАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ И КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

На этапе постановки задачи синтеза следует оговорить множество начальных условий объекта и множество конечных состояний, в которые его требуется перевести. Подобный переход удобнее рассматривать в пространстве состояний, причем в зависимости от вида области начальных и конечных состояний можно выделить четыре типа задач синтеза (рис. 13.4).

Отметим, что множество начальных состояний объекта  $\Omega[x(0)]$ , как правило, совпадает с пространством состояний, а множество конечных состояний  $\Omega[x(T)]$  является подмножеством пространства состояний. Кроме этого, объект управления нужно перевести не в любую точку пространства состояний, а лишь в ту, которая принадлежит подмножеству реализуемых равновесных состояний (см. разд. 11.2).

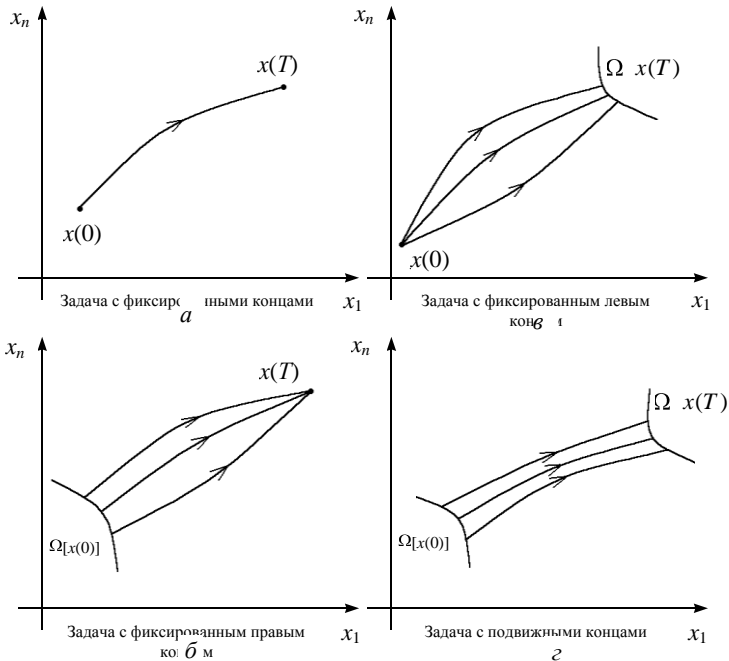


Рис. 13.4. Иллюстрация четырех типов задач синтеза:

$a$  – с фиксированными концами;  $b$  – с одним правым;  $b$  – с левым;  $z$  – задача с подвижными концами

Рассмотрим на примере определение реализуемых равновесных состояний объекта.

**ПРИМЕР 13.2**

Определить множество равновесных состояний для объекта, поведение которого описывает система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + 2u. \end{cases}$$

Запишем для него уравнения статики

$$\begin{cases} 2x_1^0 - x_2^0 + u = 0, \\ -x_1^0 - 5x_2^0 + 2u = 0. \end{cases}$$

Определим управляющее воздействие из первого уравнения и подставим во второе. После преобразования получим уравнение множества реализуемых равновесных состояний в виде

$$x_2^0 = -\frac{5}{3}x_1^0.$$

Графической интерпретацией этого множества в пространстве состояний является прямая, именно ей должно принадлежать конечное состояние объекта. В другую точку пространства состояний его перевести невозможно (точнее, перевести можно, но стабилизировать нельзя).

### 13.2.3. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И УПРАВЛЕНИЕ

Любая задача оптимизации имеет практический смысл только при ограничениях на переменные состояния и ресурс управления.

Ограничения на переменные состояния дают некоторую рабочую область  $\Omega_x$  в пространстве состояний (рис. 13.5, а). Наиболее часто они носят характер модуля,  $|x_i| \leq \bar{x}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

На управляющие воздействия также накладываются ограничения, которые в общем случае можно представить в виде некоторой рабочей области  $\Omega_u$  (рис. 13.5, б). В реальных системах ограничение на ресурс управления, как правило, также носит характер ограничения по модулю  $|u_j| \leq \bar{u}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .



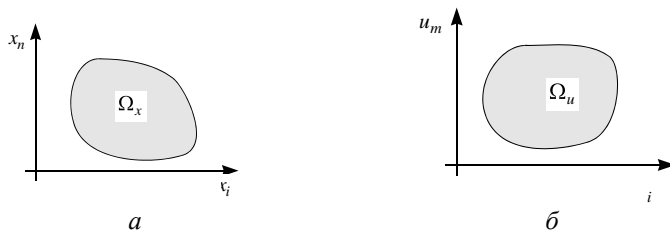


Рис. 13.5. Иллюстрация рабочих областей:

$a$  – переменных состояния;  $b$  – управляющих воздействий

На этапе постановки задачи синтеза необходимо убедиться в том, что множество начальных  $\Omega[x(0)]$  и конечных  $\Omega[x(T)]$  состояний объекта находится внутри рабочей области пространства состояний  $\Omega_x$ .

### 13.2.4. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Критерий оптимальности в обобщенной форме отражает требования к качеству переходных процессов замкнутой системы. В задаче синтеза оптимальных систем его принято представлять в виде интегрального функционала

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T f_0(x, u) dt, \quad (13.4)$$

где  $T$  – время перехода из начального состояния в конечное.

В зависимости от требований к качеству работы системы можно выделить несколько наиболее часто встречающихся критериев оптимальности.

1. *Критерий быстродействия* отражает требование минимизации времени переходного процесса и может быть записан в виде

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} T. \quad (13.5)$$

Этот критерий представим в форме интегрального функционала

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T dt. \quad (13.6)$$

2. *Критерий минимума затрат энергии по состоянию.* В случае, когда требуется минимизировать затраты энергии только по одной из компонент вектора состояния, критерий оптимальности имеет вид

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T x_i^2 t \, dt. \quad (13.7)$$

Если речь идет о минимизации затрат энергии по всему вектору состояния, то он принимает форму

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T x^T P x \, dt, \quad (13.8)$$

где  $P$  – матрица коэффициентов квадратичной формы размера  $n \times n$ .

3. *Критерий минимума затрат энергии на управление.* Он может быть записан аналогично (13.7) относительно одной из компонент управляющего воздействия

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T u_j^2 \, dt \quad (13.9)$$

или относительно всего вектора управления

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T u^T Q u \, dt, \quad (13.10)$$

где  $Q$  – матрица квадратичной формы размера  $m \times m$ .

4. *Критерий минимума полных затрат энергии.* Это общий случай критерия минимума затрат энергии, объединяющий критерии (13.8) и (13.9):

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T x^T P x + u^T Q u \, dt. \quad (13.11)$$

### 13.2.5. ФОРМА РЕЗУЛЬТАТА

При постановке задачи заранее оговаривается тип управляющего воздействия, которое необходимо определить в процессе синтеза. Например, для одноактных систем, работающих без помех и возмущений, можно рассчитывать программное оптимальное управление  $u^0 = u^0(t)$ . Однако более часто применяют оптимальное управление в виде обратной связи  $u^0 = u^0(x)$ .

Задача синтеза оптимальной системы формулируется следующим образом. Для объекта, описанного в переменных состояния с заданными ограничениями на управление и состояние, необходимо найти такой закон управления, который обеспечивал бы переход системы из начального состояния в конечное в соответствии с определенным критерием оптимальности.

## 13.3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Метод динамического программирования, предложенный в начале 1950-х годов Р. Беллманом [1, 3, 41, 44], используется для синтеза оптимальных систем управления, при выводе его основных соотношений используется принцип оптимальности.

### 13.3.1. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ

Формулировка принципа оптимальности следующая: конечный участок оптимальной траектории есть также оптимальная траектория. Доказательство этого принципа можно найти в [3], здесь ограничимся лишь его пояснением.

Предположим, что существует единственная оптимальная траектория перехода из точки  $x(0)$  в точку  $x(T)$  (рис. 13.6). Промежуточная точка  $x(t)$  разбивает эту траекторию на две части. Причем ее конечный участок представляет собой оптимальную траекторию, иначе можно было бы найти новую оптимальную

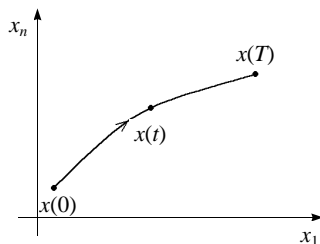


Рис. 13.6. Иллюстрация принципа оптимальности

траекторию перехода из точки  $x(t)$  в точку  $x(T)$  и организовать движение из начальной точки  $x(0)$  в конечную  $x(T)$  по новой оптимальной траектории. Это невозможно, так как для системы существует лишь одна оптимальная траектория перехода из одной точки в другую.

### 13.3.2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Будем рассматривать общий класс объектов управления, который описывается уравнением (13.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad x \in R^n, \\ u &\in R^m, \quad m \leq n. \end{aligned}$$

Полагаем, что переменные состояния  $|x_i| \leq \bar{x}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  и ресурс управления  $|u_j| \leq \bar{U}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  ограничены.

Необходимо определить управляющее воздействие, которое обеспечивало бы переход из начального состояния  $x(t)$  в конечное  $x(T)$  за время  $T$  (рис. 13.7) в соответствии с критерием оптимальности

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_t^T f_0(x, u) dt. \quad (13.12)$$

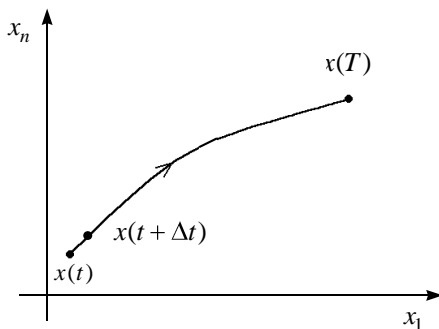


Рис. 13.7. Иллюстрация оптимального перехода из одной точки в другую

Выберем на оптимальной траектории перехода промежуточную точку  $x(t+\Delta t)$ , расположенную достаточно близко к заданной начальной точке. Согласно принципу оптимальности конечный участок есть также оптимальная траектория, поэтому представим критерий оптимальности (13.12) в виде суммы двух критериев, соответствующих двум участкам движения:

$$J = J_1 + J_2 = \min_{u \in \Omega_u} \int_t^{t+\Delta t} f_0(x, u) d\tau + \min_{u \in \Omega_u} \int_{t+\Delta t}^T f_0(x, u) d\tau \quad (13.13)$$

или после преобразований

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \left[ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x, u) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f_0(x, u) d\tau \right]. \quad (13.14)$$

Рассматривая второй интеграл выражения (13.14) как функцию нижнего предела, обозначим его

$$V x(t + \Delta t) = \int_{t+\Delta t}^T f_0(x, u) d\tau. \quad (13.15)$$

С учетом (13.15) соотношение (13.14) представим в виде

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \left[ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x, u) d\tau + V x(t + \Delta t) \right]. \quad (13.16)$$

Полагая промежуток времени  $\Delta t$  достаточно малым, сделаем в (13.16) следующие упрощения:

1) интеграл приближенно заменим произведением

$$\int_t^{t+\Delta t} f_0(x, u) d\tau \cong f_0(x, u) \Delta t; \quad (13.17)$$

2) функцию  $V x(t + \Delta t)$  разложим в ряд Тейлора в окрестности заданной начальной точки

$$V(x(t + \Delta t)) = V(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x^T} \Delta x + R, \quad (13.18)$$

где  $R$  – остаточные члены ряда разложения, которыми можно пренебречь.

Учитывая приближенные замены (13.17) и (13.18), преобразуем выражение (13.16):

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) \Delta t + V(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x^T} \Delta x \right]. \quad (13.19)$$

Представим  $\min_{u \in \Omega_u}$  в равенстве (13.19) в виде суммы двух составляющих следующим образом:

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x^T} \Delta x \right] + \min_{u \in \Omega_u} [V(x(t))]. \quad (13.20)$$

Обсудим получившееся выражение. Согласно введенному обозначению (13.15) здесь

$$\min_{u \in \Omega_u} [V(x(t))] = J, \quad (13.21)$$

поэтому вместо (13.20) получим

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x^T} \Delta x \right] = 0. \quad (13.22)$$

Поделим обе части равенства (13.22) на  $\Delta t$

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x^T} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right],$$

а затем устремим  $\Delta t \rightarrow 0$  и получим следующее уравнение:

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x^T} \dot{x} \right] = 0. \quad (13.23)$$

Поскольку рассматривается оптимальная траектория движения для объекта (13.1), подставим в (13.23) вместо  $\dot{x}$  правую часть уравнения объекта и получим основное уравнение метода динамического программирования в виде

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x, u) \right] = 0. \quad (13.24)$$

Таким образом, оптимальным будет управление, которое минимизирует выражение (13.24). Однако использовать его для вычисления  $u^0$  нельзя, так как одно уравнение (13.24) содержит  $m + 1$  неизвестную величину ( $u^0 \in R^m$  и  $V \in R^1$ ).

### 13.3.3. РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В случае оптимального управления  $u = u^0$  соотношение (13.24) принимает вид

$$f_0(x, u^0) + \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x, u^0) = 0. \quad (13.25)$$

Продифференцируем (13.25) по  $u$  вдоль оптимальной траектории

$$\left. \frac{\partial f_0(x, u)}{\partial u} \right|_{u=u^0} + \frac{\partial V}{\partial x^T} \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{u=u^0} = 0. \quad (13.26)$$

Добавив уравнения (13.26) к (13.25), получим систему из  $m+1$  уравнения с  $m+1$  неизвестным, решая которую можно найти оптимальное управление.

Поскольку (13.25) и (13.26) представляют собой систему уравнений в частных производных, для определения из нее оптимального управления, как правило, приходится использовать приближенные численные методы. В результате найденное управление получается не оптимальным, а близким к нему.

Задача отыскания *точного* оптимального управления методом динамического программирования носит название **задачи АКОР** (анали-

тического конструирования оптимальных регуляторов). Эта задача имеет решение при наличии следующих условий [1, 3, 17].

1. Объект управления описывается линейным уравнением состояния (13.3)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad m \leq n.$$

2. Переход из начальной точки  $x(0)$  в конечную  $x(T)$  рассматривается на бесконечном интервале времени ( $T \rightarrow \infty$ ).

3. Критерий оптимальности имеет вид квадратичной формы (13.11)

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \left[ \int_0^{\infty} x^T P x + u^T Q u \, d\tau \right].$$

Оптимальное управление, полученное методом динамического программирования, для такой постановки задачи будет иметь вид

$$u^0 = Kx.$$

Таким образом, оптимальным для задачи АКОР будет пропорциональный закон управления.

### ПРИМЕР 13.2

Объект, модель которого имеет вид

$$\dot{x} = -2x + u, \quad |u| \leq 100, \quad |x| \leq 20,$$

необходимо перевести из начальной точки  $x(0) = 0$  в конечную  $x(T) = 1$ .  
Время процесса не ограничено, а критерий оптимальности следующий:

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^{\infty} \underbrace{5x^2 + u^2}_{f_0} \, d\tau.$$

Запишем основное уравнение метода динамического программирования (13.25)

$$5x^2 + u_0^2 + \frac{\partial V}{\partial x^T} (-2x + u_0) = 0$$



и дополним его уравнением в частных производных (13.26)

$$2u_0 + \frac{\partial V}{\partial x^T} = 0 .$$

Выразим из второго уравнения  $\partial V / \partial x$  и подставим в первое, в результате получим

$$5x^2 + u_0^2 + 4xu_0^2 - 2u_0^2 = 0$$

или после приведения подобных

$$u_0^2 - 4xu_0 - 5x^2 = 0 .$$

Решение квадратного уравнения относительно управления дает два значения:

$$u_{0 \ 1} = 5x, \quad u_{0 \ 2} = -x.$$

Поскольку для одной системы двух оптимальных законов управления быть не может, одно из найденных значений не является оптимальным. Для определения оптимального управления проверим устойчивость замкнутой системы.

В уравнение объекта подставим значение  $u_{0 \ 1}$  и получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} = 3x .$$

Как видим, система неустойчива, а значит, первое управляющее воздействие не является оптимальным.

В уравнение объекта подставим значение  $u_{0 \ 2}$ , при этом уравнение замкнутой системы примет вид

$$\dot{x} = -3x$$

и она будет устойчивой.

Таким образом, оптимальный закон управления имеет вид  $u_0 = Kx$ , где  $K = -1$ .

## 13.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

### 13.4.1. ОСНОВНОЕ СООТНОШЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Принцип максимума Понтрягина представляет собой метод расчета оптимального управления. Он был сформулирован независимо [1, 3, 31] и почти в то же время, что и метод динамического программирования. Впоследствии оказалось, что уравнения одного метода можно получить из другого и наоборот. Запишем основные соотношения принципа максимума на основе уравнений метода динамического программирования.

Рассмотрим основное соотношение (13.24)

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[ f_0(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x, u) \right] = 0.$$

Поскольку минимум функции равен максимуму этой же функции с противоположным знаком, то справедливо:

$$\max_{u \in \Omega_u} \left[ -f_0(x, u) - \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x, u) \right] = 0. \quad (13.27)$$

Преобразуем уравнение (13.27), предварительно введя ряд обозначений.

1. Введем расширенный вектор состояния  $z \in R^{n+1}$ , дополнив его компонентой  $x_0$ :

$$z = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T f_0(x, u) d\tau \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (13.28)$$

2. Введем соответствующий расширенный вектор правых частей  $\varphi \in R^{n+1}$ :

$$\varphi(x, u) = \begin{bmatrix} f_0(x, u) \\ f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}. \quad (13.29)$$

3. Вектор сопряженных координат  $\psi \in R^{n+1}$ :

$$\psi(z) = \left[ -1, \quad -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad -\frac{\partial V}{\partial x_n} \right]. \quad (13.30)$$

Определим скалярное произведение вектора сопряженных координат и расширенного вектора правых частей, которое называется функцией Понтрягина (**гамильтониан**):

$$H = \psi(z)\varphi(x, u). \quad (13.31)$$

Если вместо вектора сопряженных координат и расширенного вектора правых частей подставить их значения согласно (13.30) и (13.29) в выражение (13.31), то последнее можно представить следующим образом:

$$H = \left[ -1, \quad -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad -\frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_0(x, u) \\ f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{bmatrix},$$

или окончательно

$$H = -f_0(x, u) - \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x, u). \quad (13.32)$$

С учетом (13.32) уравнение (13.27) можно записать в виде

$$\max_{u \in \Omega_u} H(z, u) = 0, \quad (13.33)$$

которое и представляет собой основное соотношение принципа максимума.

При этом сопряженные координаты определяются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial z^T}. \quad (13.34)$$

*Формулировка принципа максимума.* Оптимальным является управление из области допустимых значений, которое обеспечивает максимум выражения (13.33).

В случае, когда ресурс управления объекта не ограничен, для нахождения максимума гамильтониана можно воспользоваться необходимым условием экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial u^T} = 0. \quad (13.35)$$

При ограниченном ресурсе (например,  $|u| \leq \bar{U}$ ) вычисленное с помощью (13.35) оптимальное управляющее воздействие может находиться вне области допустимых значений, поэтому для отыскания максимума гамильтониана необходимо использовать максимальное значение управления  $\bar{U}$ .

### 13.4.2. ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

На основе рассмотренных соотношений принципа максимума Понтрягина можно предложить следующую процедуру расчета регулятора.

1. Описание объекта следует привести к стандартному для теории оптимального управления виду (13.1):

$$\dot{x} = f(x, u), \quad |u| \leq \bar{U}.$$

Записывается критерий оптимальности (13.4) в форме

$$J^0 = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T f_0(x, u) dt.$$

2. Формируется расширенный вектор состояния  $z$  и правых частей  $\varphi(z, u)$ ; в общем виде записывается вектор сопряженных координат

$$\Psi = \Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n .$$

3. В форме скалярного произведения векторов  $\psi(\cdot)$  и  $\varphi(\cdot)$  записывается выражение

$$H = \psi(z)\varphi(z, u) .$$

4. Из условия максимума определяется оптимальное управление как функция сопряженных координат

$$\max_{u \in \Omega_u} H : \Rightarrow u^0 = u^0(\psi) .$$

5. Формируется система дифференциальных уравнений для нахождения сопряженных координат

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial z^T} .$$

6. Вычисляется оптимальное управление в виде функции времени (программное управление)

$$u^0 = u^0(t) .$$

7. По возможности осуществляется переход к оптимальному управлению в виде обратной связи

$$u^0 = u^0(x) ,$$

т. е. решается задача синтеза регулятора.

Рассмотрим вычисление оптимального управления с помощью описанной процедуры на примере.

**ПРИМЕР 13.3**

Определить оптимальное управление для объекта, поведение которого описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Требуется обеспечить переход из начальной точки в конечную

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(T) = 1 \\ x_2(T) = 0 \end{cases}$$

за заданное время  $T = 1$  с при минимуме затрат энергии, т. е.

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T u^2 d\tau.$$

Поскольку известно описание объекта в переменных состояния, переходим к формированию расширенного вектора состояния и правых частей, а также запишем вектор сопряженных координат

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \int_0^T u^2 d\tau \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \Psi_0, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2.$$

Сформируем теперь гамильтониан

$$H = \Psi\varphi = \Psi_0 u^2 + \Psi_1 x_2 + \Psi_2 u$$

и определим его максимум по  $u$

$$\max_{u \in \Omega_u} H : \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 2\Psi_0 u + \Psi_2 = 0.$$

Из этого уравнения определим оптимальное управление в виде функции сопряженных координат

$$u^0 = -\frac{\Psi_2}{2\Psi_0}.$$

Для сопряженных координат запишем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial z_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z_3} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \end{cases}$$

из которой получим

$$\psi_0 = c_1 = \text{const},$$

$$\psi_1 = c_2 = \text{const},$$

$$\psi_2 = -c_2 t + c_3.$$

В результате оптимальное управление примет вид

$$u^0 = -\frac{-c_2 t + c_3}{2c_1} = b_1 t + b_2.$$

Коэффициенты  $b_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) определим, решая краевую задачу. С этой целью запишем уравнения замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1 t + b_2. \end{cases}$$

Найдем решение для переменных состояния:

$$\begin{cases} x_2 \ t = x_2 \ 0 + \int_0^T b_1 t + b_2 \ d\tau = \frac{1}{2} b_1 t^2 + b_2 t, \\ x_1 \ t = x_1 \ 0 + \int_0^T \left( \frac{1}{2} b_1 \tau^2 + b_2 \tau \right) d\tau = \frac{1}{6} b_1 t^3 + \frac{1}{2} b_2 t^2. \end{cases}$$

Учтем теперь заданные начальные и конечные условия и  $T = 1$  с.

$$\begin{cases} x_1 \ T = 1 = \frac{1}{6} b_1 + \frac{1}{2} b_2, \\ x_2 \ T = 0 = \frac{1}{2} b_1 + b_2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, определим неизвестные коэффициенты:  $b_1 = -12$ ,  $b_2 = 6$ . В результате оптимальный программный закон управления будет

$$u^0 = -12t + 6.$$

### 13.4.3. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Задача оптимального быстрогодействия имеет некоторые особенности, которые упрощают ее решение на основе принципа максимума Понтрягина [1, 3].

**Гамильтониан быстрогодействия.** Рассмотрим общий класс объектов управления (13.1)

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad m \leq n$$

с ограниченным управлением  $|u| \leq \bar{U}$  и критерием оптимальности в виде (13.6), т. е. критерием быстрогодействия

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T d\tau.$$

Согласно процедуре синтеза на основе принципа максимума запишем расширенный вектор правых частей и вектор сопряженных координат

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}, \quad \psi = -1, \quad \psi_1, \quad \dots, \quad \psi_n,$$

а затем сформируем гамильтониан в виде

$$H = \psi\varphi(\cdot) = -1 + \psi_1 f_1(\cdot) + \dots + \psi_n f_n(\cdot). \quad (13.36)$$

В соответствии с (13.33) максимум гамильтониана равен нулю. Поскольку первое слагаемое в данном выражении не зависит от управления, можно вместо (13.36) рассматривать усеченный гамильтониан, который называется **гамильтонианом быстрогодействия**



$$H_{\bar{6}} = \tilde{\psi}f(\cdot) = \psi_1 f_1(\cdot) + \dots + \psi_n f_n(\cdot). \quad (13.37)$$

В этом случае уравнение принципа максимума принимает вид

$$\max_{u \in \Omega_u} H_{\bar{6}} = 1. \quad (13.38)$$

Таким образом, при решении задачи оптимального быстродействия нет необходимости переходить к расширенному вектору состояния и расширенному вектору правых частей. Можно сформировать гамильтониан быстродействия и определить управление, обеспечивающее его максимум в соответствии с (13.38).

**Разрывное (релейное) управление.** Для объектов с аддитивным управлением вида (13.2)

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x \in R^n, u \in R^m,$$

ограниченным ресурсом управления  $|u| \leq \bar{U}$  и требованием в виде критерия быстродействия управляющее воздействие имеет разрывный характер.

Сформируем гамильтониан быстродействия (13.37)

$$H_{\bar{6}} = \psi_1 f_1(\cdot) + \psi_1 B_1(\cdot)u + \dots + \psi_n f_n(\cdot) + \psi_n B_n(\cdot)u, \quad (13.39)$$

где  $f_i(\cdot)$  –  $i$ -й элемент вектора  $f(x)$ , а  $B_i(\cdot)$  –  $i$ -я строка матрицы  $B(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Управление, обеспечивающее максимум гамильтониана (13.39) с учетом ограничений, имеет вид

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} \psi B(x). \quad (13.40)$$

Следовательно, для объектов класса (13.2) оптимальное управление всегда носит релейный характер.

**Теорема о числе переключений.** Данная теорема связывает число переключений оптимального управления со свойствами объекта. Она справедлива для линейных объектов (13.3)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, u \in R^m, m \leq n$$

с ограничением типа  $|u| \leq \bar{U}$  и критерием быстродействия. При этом оптимальное управление имеет вид (13.40).

Поскольку объект управления линейный, для него можно определить корни характеристического уравнения

$$\det(pI - A) = 0 \quad (13.41)$$

в виде совокупности  $\Lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Рассмотрим без доказательства формулировку теоремы.

**Теорема.** Если корни характеристического уравнения (13.41) вещественные, то число переключений управляющего воздействия не превышает  $(n - 1)$ , где  $n$  – порядок объекта.

**С л е д с т в и е.** Число интервалов постоянства управляющего воздействия не превышает  $n$ .

Варианты изменения оптимального управления в линейной системе третьего порядка с вещественными корнями приведены на рис. 13.8.

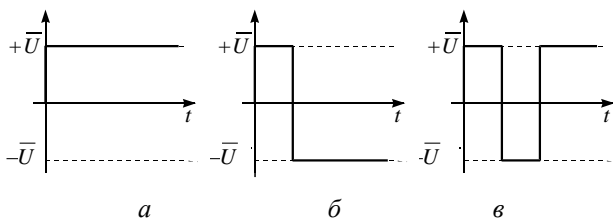


Рис. 13.8. Иллюстрация изменения оптимального управления:

$a$  – нет переключений;  $b$  – с одним,  $c$  – с двумя переключениями

В случае, когда среди совокупности корней характеристического уравнения (13.41) есть комплексно-сопряженные, число переключений теоретически не ограничено. В реальных системах невысокого порядка число переключений, как правило, невелико.

#### ПРИМЕР 13.4

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной по быстродействию системы для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u, \quad |u| \leq \bar{U}. \end{cases}$$

Запишем гамильтониан быстродействия

$$H_0 = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 - 2dx_2 + u)$$

и определим оптимальное управление

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} \psi_2 .$$

Система дифференциальных уравнений для сопряженных координат имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + 2d\psi_2. \end{cases}$$

Ее можно представить в виде одного дифференциального уравнения

$$\ddot{\psi}_1 - 2d\dot{\psi}_1 + \psi_1 = 0 ,$$

которому соответствует характеристическое уравнение

$$p^2 - 2dp + 1 = 0 .$$

При  $d \geq 1$  его корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут вещественными и положительными, следовательно, оптимальное управление принимает вид

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) ,$$

где  $c_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

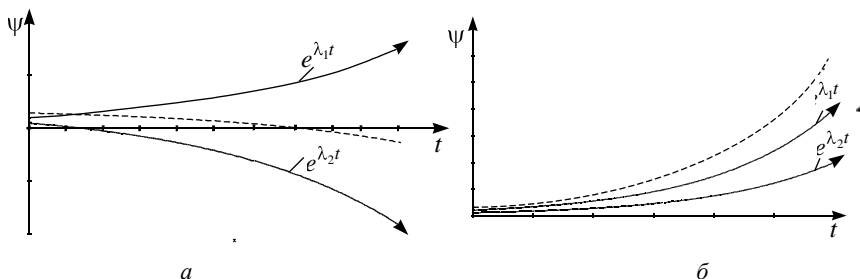


Рис. 13.9. Иллюстрация теоремы о числе переключений:  
 а – одно переключение; б – без переключений; штриховая линия – сумма экспонент

Сумма двух экспонент может только один раз изменить знак, что соответствует однократному переключению управляющего воздействия (рис. 13.9, *a*), либо не изменит знака совсем. В последнем случае не будет переключений управляющего воздействия (рис. 13.9, *b*).

## 13.5. МЕТОД ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

### 13.5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Этот метод применяется для формирования оптимального управления в виде обратной связи в случае, когда управление носит разрывной (релейный) характер.

Рассматривается общая задача синтеза оптимальной системы для объекта (13.1)

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, u), \quad \tilde{x} \in R^n, \quad u \in R^m, \quad m \leq n$$

и переход из произвольных начальных состояний  $\tilde{x}(0)$  в заданные конечные  $\tilde{x}(T)$  в соответствии с некоторым критерием оптимальности

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^T f_0(\tilde{x}, u) d\tau. \quad (13.42)$$

Оптимальный закон управления в этом случае имеет вид

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} S \tilde{x}, \quad (13.43)$$

где  $\bar{U} \in R^m$  – вектор максимальных значений управления,  $S \in R^m$  – вектор функций, определяющих в пространстве состояний некоторую поверхность, которая называется поверхностью переключения [42]

$$S \tilde{x} = 0. \quad (13.44)$$

Для определения этой поверхности предварительно конечная точка «приводится» к началу координат с помощью замены переменных

$$x = \tilde{x} - \tilde{x}(T). \quad (13.45)$$

Затем в пространстве состояний исследуются траектории перехода из произвольных начальных состояний  $x(0)$  в конечную точку  $x(T) = 0$ . На траекториях перехода выделяются точки, где происходит смена знака управления, которые объединяются в поверхность переключения

$$S(x) = 0. \quad (13.46)$$

Однако чтобы получить траекторию перехода из начальной точки  $x_1(0)$  в начало координат пространства состояний, необходимо также задавать в соответствии с принципом максимума и начальные условия для сопряженных координат  $\psi(0)$ . Если эти начальные условия выбраны неудачно, то получим траекторию перехода не в  $x(T) = 0$ , а в произвольную точку пространства состояний. В этом случае следует задать новые начальные условия для сопряженных координат  $\psi(0)$  и вновь попытаться отыскать траекторию перехода в начало координат (рис.13.10).

Для новой начальной точки  $x_2(0)$  траектория перехода в начало координат также может быть получена в результате перебора начальных условий для сопряженных координат (рис.13.10).

Объединяя точки переключения управления на всех траекториях перехода из произвольных состояний в начало координат, можно получить поверхность переключения в виде (13.46) или, разрешив уравнение (13.46) относительно  $x_n$ , в следующей форме:

$$x_n = F x^1, \quad (13.47)$$

где  $x^1$  – «усеченный» вектор состояния (без последней компоненты).

С учетом (13.47) оптимальный закон управления (13.43) можно записать в виде

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} \left[ -x_n - F x^1 \right]. \quad (13.48)$$

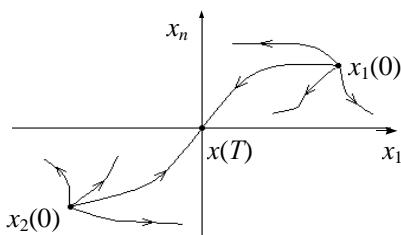


Рис. 13.10. Иллюстрация построения траекторий перехода в начало координат

Таким образом, метод поверхности переключения позволяет получить оптимальный закон управления в виде обратной связи. Однако при этом приходится рассматривать две совокупности начальных условий: для переменных состояния  $x(0)$  и сопряженных координат  $\psi(0)$ , что существенно затрудняет определение управляющего воздействия.

### 13.5.2. МЕТОД ОБРАТНОГО ВРЕМЕНИ

С целью упрощения задачи определения поверхности переключения предлагается поменять местами начальную  $x(0)$  и конечную  $x(T) = 0$  точки, что в пространстве состояний соответствует движению в обратную сторону. Для динамической системы это означает замену времени  $t$  на  $-t$ . При этом вместо двух совокупностей начальных условий  $x(0); \psi(0)$  нужно рассматривать только одну —  $\psi(0)$ , так как  $x(0) = 0$ .

Постановка задачи синтеза оптимальной системы в обратном времени формулируется следующим образом. Для объекта

$$\dot{x} = -f(x, u)$$

с ограниченным ресурсом управления необходимо определить оптимальное управление в виде обратной связи, которое обеспечивает переход из начальной точки  $x(0) = 0$  в конечную  $x(T)$  в соответствии с критерием оптимальности (13.4). При этом заранее известно, что оптимальное управление имеет релейный характер.

Отметим, что в этом случае необходимо перебирать только одну совокупность начальных условий  $\psi(0)$ . Причем каждому конкретному значению  $\psi_i(0)$  соответствует оптимальная траектория перехода из заданной начальной точки  $x(0) = 0$  в некоторую конечную  $x_i(T)$ . В соответствии с методом поверхности переключений в пространстве состояний на траекториях перехода выделяются точки, где происходит смена знака управления и объединяются в поверхность  $S(x) = -x_n - F(x^1)$ .

В обычном времени следует изменить направление движения на противоположное. В результате находится оптимальное управление в виде (13.43)

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} S x$$

или в форме (13.48).

### ПРИМЕР 13.5

Рассмотрим процедуру определения оптимального управления методом обратного времени для объекта

$$y = \frac{1}{p^2} u$$

с ограничением на управление  $|u| \leq A$ . Необходимо перейти из начальной точки  $x_0$  в конечную  $x_T = 0$  с критерием оптимальности

$$J = \min_{u \in \Omega_u} \int_0^t d\tau.$$

Запишем уравнения объекта в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

где  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ .

Поскольку рассматривается задача оптимального быстрогодействия, оптимальное управление носит релейный характер

$$u^0 = A \operatorname{sgn} \psi_2.$$

Для определения  $u^0$  в виде функции переменных состояния используем метод поверхностей переключения. Предварительно запишем уравнения объекта в обратном времени

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -u. \end{cases}$$

Будем решать следующую задачу перехода:  $x(0)=0 \rightarrow x(T)$ . Для получения фазовых траекторий в пространстве состояний воспользуемся методом непосредственного интегрирования и рассмотрим последовательно два значения оптимального управления.

1. Случай, когда  $u^0 = +A$ . Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -A. \end{cases}$$

Интегрируя последовательно второе, а затем первое уравнения, получим

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) - At, \\ x_1(t) = x_1(0) + \frac{1}{2} At^2 \end{cases}$$

или при нулевых начальных условиях

$$\begin{cases} x_2(t) = -At, \\ x_1(t) = \frac{1}{2} At^2. \end{cases}$$

Теперь исключим время  $t = -x_2/A$ , и запишем уравнение фазовой траектории, выходящей из начала координат при положительном управлении,

$$x_2 = \sqrt{2Ax_1}.$$

2. Случай, когда  $u^0 = -A$ . При этом уравнения замкнутой системы следующие:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = +A. \end{cases}$$

После интегрирования имеем

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) + At, \\ x_1(t) = x_1(0) - \frac{1}{2} At^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_2(t) = +At, \\ x_1(t) = -\frac{1}{2} At^2. \end{cases}$$



Исключая время,  $t = x_2/A$ , получаем

$$-x_1 = \frac{1}{2} A \left( \frac{x_2}{A} \right)^2.$$

В этом случае уравнение фазовой траектории, выходящей из начала координат при отрицательном управлении, принимает вид

$$x_2 = \sqrt{2A - x_1}.$$

Для каждой фазовой траектории (рис. 13.11) определим направление движения и оставим ту половину параболы, которая соответствует движению из начала координат. Затем объединим эти две полутраектории в одну и получим уравнение линии переключения

$$x_2 = -\sqrt{2A|x_1|} \operatorname{sgn} x_1.$$

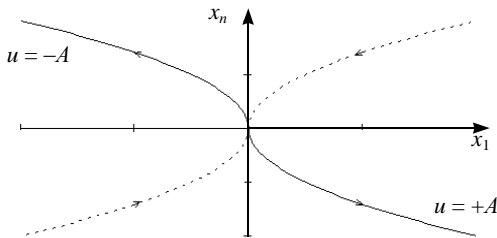


Рис. 13.11. Определение линии переключений к примеру 13.5

Оптимальный закон управления следующий:

$$u^0 = A \operatorname{sgn} -x_2 - \sqrt{2A|x_1|} \operatorname{sgn} x_1.$$

Теперь изменим направление движений на противоположное, т. е. вернемся к обычному времени (рис. 13.12).

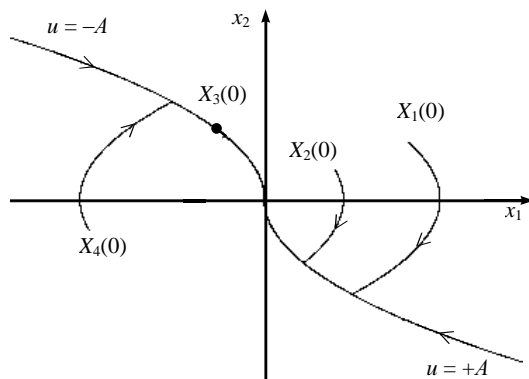


Рис. 13.12. Оптимальные траектории движения из различных начальных условий

Оптимальные траектории движения системы представляют собой участки парабол (рис. 13.12). Если начальная точка не принадлежит линии переключений, то в системе может быть только одно переключение управления (точки  $X_1(0)$ ,  $X_2(0)$  и  $X_4(0)$ ). Переключений не будет совсем, если начальная точка находится на линии переключений (начальные условия  $X_3(0)$ ).

## 13.6. СУБОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

**Субоптимальными** будем называть системы, которые близки по свойствам к оптимальным с заданной точностью. Точность приближения к оптимальной системе определяется соотношением

$$\delta = \frac{J' - J^0}{J^0} 100 \% , \quad (13.49)$$

где  $J'$  – критерий, соответствующий субоптимальной системе.

Такую систему получают в результате либо аппроксимации оптимального закона управления, либо искусственного ограничения рабочей области пространства состояний.

Рассмотрим релейный оптимальный закон управления

$$u^0 = \bar{U} \operatorname{sgn} S(x) .$$

Поверхность переключения сложной конфигурации можно аппроксимировать, например, следующим образом:

$$S(x) \cong c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad (13.50)$$

представить в виде совокупности функций

$$S(x) \cong f_1(x) + \dots + f_n(x) \quad (13.51)$$

или аппроксимировать каким-либо другим способом. При этом будут получаться субоптимальные системы, с различной степенью точности близкие к оптимальным.

Обсудим особенности субоптимальных систем на примере.

### ПРИМЕР 13.6

Рассмотрим оптимальную по быстродействию систему (см. пример 13.5) и аппроксимируем линию переключения прямой (рис. 13.13).

Уравнение реальной линии переключения имеет вид

$$S_p(x) = -x_2 - Kx_1.$$

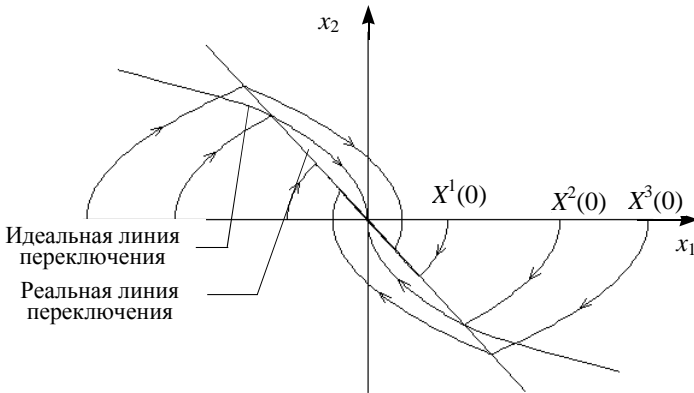


Рис. 13.13. Фазовый портрет субоптимальной системы к примеру 13.6

Процессы в субоптимальной системе будут существенно зависеть от начальных условий. Так, при движении из  $X^1(0)$  изображающая точка системы попадает на реальную линию переключений  $S_p(x)$ , а затем движется вдоль нее в скользящем режиме.

Из начальных условий  $X^2(0)$  изображающая точка системы будет попадать в точку пересечения идеальной и реальной линий переключения и к началу координат будет двигаться по соответствующему участку идеальной линии переключений, т. е. по оптимальной траектории.

При движении из  $X^3(0)$  изображающая точка системы будет доходить до  $S_p(x)$ , переключаться на траекторию, соответствующую другому знаку управления, вновь попадать на реальную линию переключений и двигаться вдоль нее в скользящем режиме.

Таким образом, в субоптимальной системе могут быть строго оптимальные процессы, только если из начальных условий изображающая точка системы по фазовой траектории попадает в точку пересечения идеальной и реальной линий переключения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С появлением рассмотренных методов оптимизации переходных процессов в теории автоматического управления возник ряд инженерных методов проектирования. Особенно распространенными стали релейные системы оптимизации по быстродействию. В начале главы рассмотрен случай системы первого порядка, когда алгоритм оптимального управления практически не зависит от параметров объекта и возмущения. К сожалению, этот случай крайне редкий; в подавляющем большинстве система автоматики должна подавлять действие возмущений, и вид оптимальных процессов, а следовательно, и алгоритм управления зависят от возмущений. При этом характер изменения самих возмущений во времени неизвестен. Это обстоятельство резко снизило интерес инженеров к математическим методам оптимального управления.

Есть, однако, несколько конкретных технических ситуаций, когда возможности математической теории оптимального управления могут использоваться в полной мере. Показательным примером может служить задача автоматического управления лифтами и подъемниками. При этом параметры объекта (масса груза) меняются от процесса к процессу, а ограниченным является только значение старшей производной от положения (выходной величины). Старшей производной является ускорение кабины лифта или какая-либо его производная. В пассажирских подъемниках они должны быть ограничены условиями комфорта пассажиров, а в грузовых – условиями прочности конструкции (ограничен должен быть рывок).

В целом теория оптимальных систем автоматики уже вошла в классику автоматического управления, и для нее существует сфера применения, хотя и не такая большая, как казалось вначале.

## ЗАДАЧИ

**13.1.** Для объекта, поведение которого описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + u, \\ y = x_1 + 2x_2, \end{cases}$$

определить оптимальное управление, обеспечивающее переход из начального состояния  $x_1(0)=0, x_2(0)=0$  в заданное конечное  $x_1(T)=1, x_2(T)=0$  за время  $T=1$  с. Критерий оптимальности сле-

дующий:  $J = \min_u \int_0^T u^2(t) dt$ .

**13.2.** Для объекта, поведение которого описывают уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2u, \\ y = x_1, \end{cases}$$

определить оптимальное управление, обеспечивающее переход из начального состояния  $x_1(0)=2, x_2(0)=0$  в заданное конечное  $x_1(T)=0, x_2(T)=0$  за минимальное время и при ограниченном управлении  $|u| \leq 10$ .

**13.3.** Для объекта, математическая модель которого имеет вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5}{p+4},$$

определить оптимальное управление, обеспечивающее переход из начального состояния  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  в заданное конечное  $y(T) = 2$ ,  $\dot{y}(T) = 0$  за время  $T = 1$  с. Критерий оптимальности следующий:

$$J = \min_u \int_0^T 0,5u^2(t) dt .$$

**13.4.** Определить оптимальное управление, обеспечивающее переход из начального состояния  $x_1(0) = 5$ ,  $x_2(0) = 0$  в заданное конечное  $x_1(T) = 0$ ,  $x_2(T) = 0$  за минимальное время и при ограниченном управлении  $|u| \leq 20$ , для объекта, математическая модель которого имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 6x_2 + u. \end{cases}$$

**13.5.** Определить оптимальное управление, обеспечивающее переход из начального состояния  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  в заданное конечное  $x_1(T) = 5$ ,  $x_2(T) = 0$  за время  $T = 1$  с, для объекта, математическая модель которого имеет вид

$$\dot{y} + 7y = 2u .$$

Критерий оптимальности  $J = \min_u \int_0^T 6u^2(t) dt .$

**13.6.** Для объекта, математическая модель которого имеет вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5}{p^2 + 3p} ,$$

определить оптимальное управление, обеспечивающее переход из начального состояния  $y(0) = 3$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  в заданное конечное  $y(T) = 0$ ,  $\dot{y}(T) = 0$  за минимальное время и при ограниченном управлении  $|u| \leq 30$ .

## **ПОСЛЕСЛОВИЕ**

Так как вы не можете иметь все, что хотите,  
то желайте только то, что можете иметь.

*Теренций*

### **ОБ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

В представленном читателю учебном пособии изложены основы дисциплины, которую, как правило, называют теорией автоматического управления. Однако мы обсуждаем задачи автоматического регулирования. Это объясняется тем, что целью управления в подавляющем большинстве случаев является приведение выхода объекта к нужному значению. Эту частную задачу управления называют процессом регулирования.

Читатель уже заметил, что в теории автоматического регулирования в полной мере используется язык математики. В этом отношении теория автоматического регулирования подобна таким классическим дисциплинам, как теоретическая механика или теоретическая физика. Математический аппарат в теории автоматического регулирования активно используется с начала ее развития. Не случайно поэтому создателями теории автоматического регулирования мы считаем физика Дж. К. Максвелла, математиков И.А. Вышнеградского, А.М. Ляпунова и многих других. И все же теория автоматического регулирования – сугубо техническая дисциплина. Нельзя стать специалистом по теории автоматического регулирования, изучая только ее математические

методы. Применение любой математической конструкции должно иметь технический смысл. И при математическом формулировании задач по анализу или синтезу систем автоматического регулирования центральной должна быть техническая сторона функционирования системы автоматизации. Как нам кажется, именно отрыв математической конструкции от технической сути привел к появлению некоторых расхожих понятий, которые, вообще говоря, не имеют осмысленной технической интерпретации. Например, часто авторы монографий и даже учебников под «идеальным переходным процессом» понимают мгновенный перевод объекта из начального состояния в конечное. В отличие от математика инженер должен понимать, что для совершения такого процесса при любом физическом объекте управления требуется бесконечно большой импульс энергии. Специалисту никогда не придет в голову требовать такого переходного процесса или пытаться его организовать. Именно поэтому мы взяли в качестве эпиграфа к этому разделу изречение, которое приписывают древнему философу Теренцию.

Задача автоматического управления каким-либо объектом начинается с необходимости подавлять или компенсировать какое-либо постороннее вредное воздействие на объект (например, ветер воздействует на самолет в процессе полета). Если таких возмущений нет, то она упрощается до задачи коррекции динамических свойств, которую можно решить методами, например, теоретической механики. Именно по этой причине перестали активно развиваться методы оптимизации переходных процессов, которые не удается эффективно применять, когда на объект действует возмущение, не известное заранее.

С учетом сказанного выше материал этого учебного пособия будет легко усваиваться будущим инженером, владеющим обычным для технических университетов математическим аппаратом. Материал изложен в последовательности, которая имеет место при реальном конструировании систем автоматического управления.



## ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Центральной задачей в теории автоматического управления всегда была, есть и будет задача синтеза, т. е. проектирования регулятора (управляющего устройства), который придает системе нужные статические и динамические свойства. Какими бы научными проблемами ни занимался специалист по теории автоматического регулирования, результат его работы непременно внесет вклад в решение названной центральной задачи. Далее обсудим некоторые возможные направления научных исследований, соблюдая логику изложения материала в учебном пособии.

На каждой научной конференции всегда звучат доклады, в которых переосмысливаются и содержание теории автоматического управления, и методы, которые она использует, и области ее применения. Эти по существу философско-методологические размышления очень полезны для молодых специалистов. Именно они часто задают направления будущих научных исследований.

Существующий набор динамических характеристик линейных систем сегодня устраивает конструкторов систем автоматики, но поиск более универсальных моделей следует продолжать. По этим моделям можно было бы увидеть и частотные, и временные, и локальные (в текущий момент времени и в текущей точке пространства, состояния) свойства систем автоматики. Эти будущие универсальные модели нам может дать только развитие математического аппарата. Если они будут эффективны, то, конечно, войдут в жизнь специалистов по автоматике.

К настоящему времени структурный метод является привычным «языком» для конструкторов систем автоматики. И хотя «внутри» этого метода нет видимых научных проблем, его методическое развитие, безусловно, необходимо. При этом могут появиться и новые формы структурных представлений систем.

Вопрос устойчивости линейных систем как раздела автоматики достаточно проработан. Машинными методами легко и быстро проверяется устойчивость любой мыслимой линейной системы, но все же явно недостает методик определения запасов устойчивости, что исключительно

важно при проектировании систем. Нужны и новые формы запасов устойчивости, и способы быстрого их вычисления.

Существующие способы анализа процессов в линейных системах позволяют легко вычислить и тем самым «увидеть» любой переходный процесс. Но крайне необходимы такие оценки переходных процессов, которые позволили бы конструктору образно представить переходные процессы в любых режимах работы и, в частности, при обработке возмущений.

Проблема синтеза линейных систем далека до полного разрешения. Если для синтеза одноканальных систем можно легко подобрать соответствующий метод, то для синтеза многоканальных систем выбор метода всегда является проблемой. В этом направлении нужны серьезные исследования, в результате которых появились бы эффективные методики проектирования. Часто исследователи, обсуждая синтез динамических свойств систем, «забывают» о статике, которая является в большинстве случаев основным режимом системы автоматики. Совместить выполнение требований и динамики, и статики в рамках одного метода не всегда возможно.

К сожалению, форм динамических характеристик нелинейных систем по сравнению с формами для линейных систем не так много, и мы, по существу, использовали только аппарат дифференциальных уравнений, которые дают локальные (здесь и сейчас) свойства системы. Трудно сказать, появятся ли в скором будущем такие модели динамики, которые позволили бы «увидеть» интегральные (на интервале времени) характеристики переходных процессов. И тем не менее поиск в этом направлении проводить необходимо.

Долгое время проблема устойчивости нелинейных систем была в центре внимания большой группы математиков. Для ее решения особое значение имеют результаты российских математиков: А.М. Ляпунова, Е.А. Барбашина, Н.Н. Красовского, Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина и др. Этими учеными создан аппарат, который мы называем вторым методом Ляпунова. Конструкции этого метода используются для вывода вторичных критериев устойчивости и, что очень важно, в доказательствах теорем о динамических свойствах систем. Сейчас сама задача оценки устойчивости даже сложных нелинейных систем не является актуальной. Методом машинной имитации мы можем «увидеть» все

возможные процессы в нелинейных системах и соответственно оценить их устойчивость, однако отсутствуют эффективные методы определения запасов устойчивости нелинейных систем. И в этом направлении исследования, безусловно, необходимо проводить.

Почти все методы анализа процессов в нелинейных системах (кроме способа прямого построения процессов) так или иначе эксплуатируют идею пренебрежения малыми параметрами. Заметим, что в теории автоматического управления и метод малого параметра, и соответствующий ему метод большого коэффициента доминируют с момента возникновения этой теории. При этом инженеры обычно используют известные математические конструкции и добавляют что-то свое. Несмотря на активное применение идей малого параметра, практически отсутствуют методы количественной оценки «малости» параметров, и это затрудняет оценку свойств реальных систем. Поэтому следует продолжать поиски эффективных количественных оценок влияния малых и больших параметров.

Проблема синтеза нелинейных систем долгое время была актуальной, но, хотя имеется большое количество работ по данной теме, отобрать что-либо для учебного пособия было непросто. Нам представляется, что в настоящее время наиболее регулярным методом в проблеме синтеза является метод локализации, для которого существует ясная и законченная методика проектирования. Кроме того, хорошо развиты и могут использоваться в задаче синтеза метод скользящих режимов (В.И. Уткин) и метод больших коэффициентов (М.В. Мееров). Поиск различных методов и их развитие, а также изобретение других способов являются одними из самых важных проблем автоматического регулирования.

Проблема автоматического поиска экстремума решается очень тяжело, и если для задачи математической оптимизации функций разработан и развивается аппарат, то для поиска точки экстремума в реальном времени и на реальном объекте почти нет эффективных методов. Описанный в пособии градиентный «подход» к поиску экстремума сводит исходную задачу к задаче синтеза нелинейной системы. Это один из возможных подходов, и будущие исследования должны привести в него новые принципы организации систем поиска экстремума.

В книге представлен аппарат, который позволяет найти или описать совокупность оптимальных процессов. В то же время для инженера-проектировщика нужны методы аналитического синтеза регуляторов по заданным критериям оптимальности. К сожалению, до сих пор нет эффективных методов решения этой проблемы, хотя тематика аналитического конструирования оптимальных регуляторов разрабатывается уже почти 40 лет. Трудности решения проблемы осознаны, и мы ждем от исследователей новых «прорывных» идей.

В заключение авторы желают каждому читателю легко усвоить содержание этой очень интересной дисциплины и принять участие в ее дальнейшем развитии.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1989.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1978.
3. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. – М., 1969.
4. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
6. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория автоматического регулирования. – СПб.: Профессия, 2004.
7. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 19710.
8. *Востриков А.С.* Синтез систем регулирования методом локализации. – Новосибирск: НГТУ, 2007.
9. *Гаврилов Е.Б., Юркевич В.Д.* Теория автоматического управления. Цифровые системы (сборник задач для практических занятий): учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998.
10. *Геращенко Е.И., Геращенко С.М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – М.: Наука, 1975.
11. *Гноенский Л.С., Каменский Г.С., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управляемых систем. – М.: Наука, 1969.
12. *Деруссо П.М. и др.* Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970.
13. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. – М., 2002.
14. *Ерофеев А. А.* Теория автоматического управления. – СПб.: Политехника, 1998.
15. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970.

16. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973.
17. *Иванов В.А., Фалдин Н.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. – М., 1981.
18. *Иванов В.А., Чемоданов В.К., Медведев В.С.* Математические основы теории автоматического регулирования. – М.: Высш. шк., 1973.
19. *Иващенко Н.Н.* Автоматическое регулирование. – М.: Машиностроение, 1979.
20. *Изерман Р.* Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М., 1984.
21. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977.
22. *Коновалов Г.Ф.* Радиоавтоматика. – М.: Высш. шк., 1990.
23. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976.
24. *Куб Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
25. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1969.
26. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969.
27. *Лефшиц С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. – М.: Мир, 1967.
28. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950.
29. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
30. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976.
31. *Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.* – М.: Наука, 1983.
32. *Олейников В.А., Зотов Н.С., Пришвин А.М.* Основы оптимального и экстремального управления. – М.: Высш. шк., 1969.
33. *Острем К., Виттенмарк В.* Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987.
34. *Олсон Г., Пиани Дж.* Цифровые системы автоматизации и управления. – 3-е изд. – СПб.: Невский диалект, 2001.
35. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. – М.: Высш. шк., 1986.

36. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Высш. шк., 1989.
37. *Растрюгин Л.А.* Системы экстремального регулирования. – М.: Наука, 1974.
38. *Теория* автоматического регулирования. Кн. 1–3 / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1967.
39. *Теория* автоматического управления: в 2 ч. / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1986.
40. *Топчеев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1989.
41. *Ту Ю.* Современная теория управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1971.
42. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М., 1981.
43. *Филипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
44. *Чураков Е.П.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Энергоатомиздат, 1987.
45. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972.
46. *Luenberger G.G.* Observers for multivariable systems, IEEE Trans. AC, 1966. Nr. 11, 190–197.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

#### Теорема о сумме

Есть две передаточные функции  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Соответствующие им Z-преобразования

$$W_1(z) = Z W_1(s) ,$$

$$W_2(z) = Z W_2(s) .$$

*Теорема: Z-преобразование суммы равно сумме Z-преобразований*

$$W(z) = Z W_1(s) \pm W_2(s) = Z W_1(s) \pm Z W_2(s) .$$

Доказательство теоремы базируется на основном соотношении Z-преобразования и свойствах ИПФ:

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{q=0}^{\infty} g_1(qT) \pm g_2(qT) z^{-q} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} g_1(qT) z^{-q} \pm \sum_{q=0}^{\infty} g_2(qT) z^{-q} = W_1(z) \pm W_2(z) . \end{aligned}$$

#### Теорема об умножении на константу

*Теорема: Z-преобразование произведения передаточной функции на константу равно произведению константы на Z-преобразование передаточной функции*

$$W(z) = Z aW_1(s) = aZ W_1(s) = aW_1(z) .$$



**Теорема о сдвиге во временной области вправо**

$$\mathfrak{Z} g(qT - nT) = z^{-n}W(z), \quad n > 0.$$

Доказательство:

$$\mathfrak{Z} g(qT - nT) = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT - nT)z^{-q} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT - nT)z^{-q}z^n z^{-n}.$$

Сделаем замену переменной  $k = q - n$  и воспользуемся тем, что ИПФ  $g(kT)$  равна нулю при отрицательных значениях аргумента

$$\sum_{k=-n}^{\infty} g(kT)z^{-k} z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} z^{-n} = z^{-n}W(z).$$

**Теорема о сдвиге во временной области влево**

$$\mathfrak{Z} g(qT + nT) = z^n \left( W(z) - \sum_{q=0}^{n-1} g(qT)z^{-q} \right).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} g(qT + nT) &= \sum_{q=0}^{\infty} g(qT + nT)z^{-q} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} g(qT + nT)z^{-q}z^{-n}z^n = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT + nT)z^{-(q+n)}z^n. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной  $k = q + n$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}z^n = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} g(kT)z^{-k}z^n + \sum_{k=0}^{n-1} g(kT)z^{-k}z^n - \sum_{k=0}^{n-1} g(kT)z^{-k}z^n = \\ &= z^n \left( W(z) - \sum_{k=0}^{n-1} g(kT)z^{-k}z^n \right). \end{aligned}$$

Члены ряда с номерами от  $k = 0$  до  $k = n - 1$  представляют память системы.

**Теорема о начальном значении**

$$x(+0) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z).$$

**Теорема о конечном значении**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)x(z).$$

*Приложение 2***Таблица Z-преобразования**

№ п/п	$W_O(p)/p$	Z-преобразование
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{T^3 z(z^2 + 4z + 1)}{3!(z-1)^4}$
5	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
6	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$
7	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$\frac{dTz}{(z-d)^2}$

О к о н ч а н и е т а б л и ц ы

№ п/п	$W_O(p)/p$	Z-преобразование
8	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{dT^2 z(z+d)}{2!(z-d)^3}$
9	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\frac{z \sin(\beta T)}{z^2 - 2z \cos(\beta T) + 1}$
10	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$\frac{z^2 - z \cos(\beta T)}{z^2 - 2z \cos(\beta T) + 1}$
11	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{z d \sin(\beta T)}{z^2 - 2z d \cos(\beta T) + d^2}$
12	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{z^2 - z d \cos(\beta T)}{z^2 - 2z d \cos(\beta T) + d^2}$
13	$\frac{\beta-\alpha}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{(d-c)z}{(z-d)(z-c)}, \quad c = e^{-\beta T}$
14	$\frac{p}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{[z-d(1+\alpha T)]}{(z-d)^2}$
15	$\frac{\alpha}{p^2(p+\alpha)}$	$\frac{(\alpha T - 1 + d)z + (1 - d - \alpha T d)}{\alpha(z-1)^2(z-d)}$
16	$\frac{\alpha^2}{p(p+\alpha)^2}$	$\frac{[(1-d-\alpha T d)z + d^2 - d + \alpha T d]}{(z-1)(z-d)^2}$
17	$\frac{(\beta-\alpha)p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{[(\beta-\alpha)z - (\beta d - \alpha c)]z}{(z-d)(z-c)}$

## Приложение 3

Таблица расчета параметров П, ПИ, ПИД-регуляторов

Регулятор	$K$	$\frac{T}{T_{И}}$	$\frac{T_{Д}}{T}$
П	$\frac{T_{O}}{\tau + T}$	–	–
ПИ	$\frac{0,9T_{O}}{\tau + \frac{T}{2}} - \frac{0,135T_{O}T}{\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{0,27T_{O}T}{K_{O}\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	–
ПИД	$\frac{1,2T_{O}}{\tau + T} - \frac{0,3T_{O}T}{\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{0,6T_{O}T}{K_{O}\left(\tau + \frac{T}{2}\right)^2}$	$\frac{0,5T_{O}}{K_{O}T}$